Об одной форме уравнений околокритического течения в трубах

Л. Б. Корельштейн
ООО «НТП Трубопровод»

Предложена форма обыкновенных дифференциальных уравнений установившегося течения реального газа или двухфазного газожидкостного течения в трубах, удобная для численного интегрирования при околокритическом течении (при числах Маха, близких к 1).

Ключевые слова: течение реального газа в трубах, двухфазное газо-жидкостное течение, околокритическое течение, число Маха.

При транспортировке продуктов по технологическим трубопроводам, как правило, стремятся избегать слишком высоких скоростей течения, при которых возникло бы критическое истечение, либо скорость течения или расход приблизились бы к соответствующим критическим значениям. Однако есть ряд важных случаев, когда возникновение критического или околокритического течения возможно, а иногда и неизбежно. К их числу относятся, например, течение газов и двухфазных газожидкостных смесей в отводящих трубопроводах систем аварийного сброса, двухфазные течения в трансферных трубопроводах от печей к ректификационным колоннам.

Одномерные течения сжимаемых продуктов в трубах, в том числе при больших числах Маха, хорошо изучены для идеального газа, когда для различных частных случаев возможны аналитические решения уравнений течения (см., например, [1–5, 23]). Однако для реального (неидеального) газа и тем более для двухфазного газожидкостного течения неидеальных газа и жидкости, как правило, возможно лишь численное решение. При этом в случае околокритического течения использование в гидравлическом и тепловом расчете стандартного подхода, основанного на решении системы обыкновенных дифференциальных уравнений по длине трубы стандартными численными методами, вызывает затруднения. Это связано с тем, что по мере приближения к критическому течению скорость изменения по длине трубы давления и других параметров продукта быстро возрастает и стремится к бесконечности при критическом истечении. При численном интегрировании уравнений это влечет за собой необходимость перехода ко все более мелким шагам по длине, с постоянным пересчетом на каждом шаге теплофизических свойств продукта.

Однако если характеристики трубы, тепловой изоляции и окружающей среды на рассматриваемом участке можно считать постоянными, то все характеристики течения зависят только от термодинамических параметров продукта (давления и температуры или удельной энтальпии) в конкретном сечении трубы. Это позволяет записать уравнения течения как обыкновенные дифференциальные уравнения по давлению. В этом случае сингулярность исчезает, и можно применить стандартные численные методы. Хотя данный прием достаточно распространен, ранее он применялся только к различным частным случаям уравнений течения газов и двухфазных сред, и автору не удалось обнаружить в литературе соответствующих уравнений для общего случая течения. Данная статья восполняет этот пробел.

Околокритическое течение реальных газов

Классические дифференциальные уравнения течения реального газа по прямой трубе имеют вид (см., например, [1–7]):

$$\frac{Aw}{u} = AG = W = \text{const}; \qquad (1)$$

$$u\,dp + d\left(\alpha\frac{w^2}{2}\right) + g\sin\theta\,dl + \frac{\lambda}{2D}w^2\,dl = 0; \qquad (2)$$

$$dh + d\left(\alpha\frac{w^2}{2}\right) + g\sin\theta\,dl + \frac{q}{W}\,dl = 0, \qquad (3)$$

где $A = \pi D^2/4$ = const — площадь поперечного сечения трубы, м^2; D — внутренний диаметр трубы, м; $G = W/A$ = const — массовая плотность потока, кг/(м^2·с); g — ускорение свободного падения, м/с^2; h — удельная энтальпия продукта, Дж/кг; l — расстояние от начала трубы, м; p — давление, Па; u — удельный объем продукта, м^3/кг; W = const — массовый расход продукта, кг/с; w — средняя по сечению трубы скорость продукта, м/с; α — коэффициент кинетической энергии; λ — коэффициент гидравлического трения, определяемый по известным корреляциям как функция числа Рейнольдса и относительной шероховатости трубы [4, 6, 7]; θ — угол подъема трубы, рад.; q — тепловой поток от продукта в окружающую среду на единицу длины, Дж/(м·с), который определяется соотношением $q = (T - T_{env})/R_{\Sigma}$, где T и T_{env} — температура соответственно продукта и окружающей среды, К, R_{Σ} — суммарное термическое сопротивление теплопередаче между продуктом в трубопроводе и окружающей средой, м·град./Вт, которое включает термические сопротивления передачи тепла от продукта к стенке трубы, самой стенки трубы, тепловой изоляции и сопротивление передаче тепла продукта от поверхности теплоизоляционной конструкции (либо от стенки трубы для неизолированных труб) в окружающую среду. Соответствующие расчетные формулы приведены, например, в Приложении В к стандарту [8], а также в стандартах [9, 10].

Поскольку нас интересует околокритическое течение, которое практически всегда (кроме крайне экзотических случаев) турбулентно, далее будем считать, что $\alpha = 1$.

Учитывая, что $dh = Tds + udp$, из уравнений (2) и (3) получаем уравнение для расчета удельной энтропии продукта

$$ds = \frac{1}{T}\left(\frac{\lambda}{2D}w^2 - \frac{q}{W}\right)dl. \qquad (4)$$

Далее, с учетом уравнения (1), получаем

$$d\left(\alpha\frac{w^2}{2}\right) = d\left(\frac{u^2}{2}G^2\right) = G^2 u du.$$

Учитывая, что

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_s dp + \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_p ds,$$

и при этом

$$\left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_s = -\left(\frac{u}{w_c}\right)^2 = -\left(\frac{w}{w_c}\frac{u}{w}\right)^2 = -\frac{M^2}{G^2},$$

где число Маха $M = w/w_c = G/G_c$; скорость звука $w_c = \sqrt{nZRT}$; критическая массовая плотность потока $G_c = w_c/u$; Z — коэффициент сжимаемости; R — газовая постоянная; n — коэффициент изоэнтропы

$$n = -\left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln u}\right)_s = -\frac{u}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)_s;$$

$$ds = \frac{c_p}{T}dT - \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_p dp \text{ и } \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_p = \frac{T}{c_p}\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_p = \frac{uT\beta}{c_p},$$

где C_p — удельная теплоемкость газа при постоянном давлении, Дж/(кг·К); β —коэффициент объемного расширения (при постоянном давлении), град$^{-1}$

$$\beta = \frac{1}{u}\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{T}\left[1 + \frac{T}{Z}\left(\frac{\partial Z}{\partial T}\right)_p\right].$$

Получаем

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_s dp + \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_p ds;$$

$$ds = -\frac{M^2}{G^2}dp + \frac{\beta u}{c_p}\left(\frac{\lambda}{2D}w^2 - \frac{q}{W}\right)dl;$$

$$d\left(\alpha\frac{w^2}{2}\right) = G^2 u du = -uM^2 dp +$$

$$+M^2\frac{\beta TnZR}{c_p}\left(\frac{\lambda}{2D}G^2u^2 - \frac{q}{W}\right)dl.$$

Подставляя в уравнение (2), получаем

$$u\left[1 - M^2\right]dp + g\sin\theta dl +$$

$$+\left\{\left[1 + M^2 n\beta T\frac{ZR}{c_p}\right]\frac{\lambda}{2D}u^2G^2 - M^2\frac{\beta TnZRq}{c_pW}\right\}dl = 0,$$

откуда (в безразмерном виде) следует уравнение

$$\frac{d(l/D)}{d\ln p} = -\frac{1 - M^2}{\left[1 + (1-\Lambda_q)n\Lambda M^2 + \Lambda_g\sin\theta\right]\frac{\lambda n}{2}M^2}, \qquad (5)$$

в котором введены безразмерные параметры

$$\Lambda = \frac{ZR}{c_p}n\hat{\beta} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}n\hat{\beta}, \quad \hat{\beta} = \beta T = 1 + \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \ln T}\right)_p,$$

Λ — доля механической работы в удельной энтальпии при нагреве при постоянном давлении; $\hat{\beta}$ — безразмерный коэффициент объемного расширения при постоянном давлении,

$$\gamma = \frac{c_p}{c_p - ZR}, \quad \Lambda_g = \frac{2Dg}{\lambda w^2}, \quad \Lambda_q = \frac{2Dq/W}{\lambda w^2}.$$

Поясним физический смысл выражения в квадратных скобках в знаменателе правой части уравнения (5). Первый (основной) член соответствует потерям на трение, второй член (имеющий порядок 1–0,1) учитывает изменение температуры продукта вследствие нагрева из-за внутреннего трения и теплообмена с окружающей средой, третий (порядок 10^{-2}) учитывает влияние перепада высот. При этом безразмерные параметры Λ_g и Λ_q представляют собой отношения характерных величин потенциальной энергии силы тяжести (Λ_g) и теплоты (Λ_q), передаваемой в окружающую среду, к энергии, превращаемой в теплоту из-за гидравлического трения.

Заметим, что безразмерный комплекс $n\Lambda$ с учетом известных термодинамических соотношений

$$n = -\frac{u}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)_T\frac{c_p}{c_V},$$

$$c_p - c_V = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_u \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_p$$

и $\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_u \left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)_T = -1$

может быть также записан как $n\Lambda = (k-1)/\hat{\beta}$, где $k = c_p/c_v$; c_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме, Дж/(кг·К).

Выведем теперь уравнение для изменения температуры.

Учитывая термодинамическое соотношение

$$ds = \frac{c_p}{T}dT - \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_p dp$$

и уравнение (4), получаем

$$\frac{c_p}{T}dT - \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_p dp = \frac{1}{T}\left(\frac{\lambda}{2D}w^2 - \frac{q}{W}\right)dl.$$

Отсюда, подставляя ранее выведенное выражение (5) для *dl* через *dp*, после упрощений и приведения к безразмерному виду получаем:

$$\frac{d\ln T}{d\ln p} = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln p}\right)_s - \frac{\frac{\gamma-1}{\gamma}(1-\Lambda_q)(1-M^2)}{\left[1+(1-\Lambda_q)n\Lambda M^2 + \Lambda_g \sin\theta\right]}, \quad (6)$$

где

$$\left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln p}\right)_s = \frac{ZR}{c_p}\hat{\beta} = \frac{\gamma-1}{\gamma}\hat{\beta} = \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{\mu_{JT}\, p}{T},$$

μ_{JT} — коэффициент Джоуля–Томпсона, град./Па

$$\mu_{JT} = \frac{T}{p}\frac{\gamma-1}{\gamma}(\hat{\beta}-1)$$

Уравнение (6) имеет простой физический смысл: основной член правой части описывает изоэнтропный процесс реального газа, а добавочный член — влияние неизоэнтропных факторов: теплообмена с окружающей средой и необратимых потерь от трения. Как видно, чем ближе число Маха M к 1, тем ближе течение к изоэнтропному.

Для общего случая течения Fanno (течение без теплообмена с окружающей средой) уравнения (5) и (6) принимают вид

$$\frac{d(l/D)}{d\ln p} = -\frac{1-M^2}{\frac{\lambda}{2}nM^2\left[1+\Lambda M^2 + \Lambda_g \sin\theta\right]}; \quad (7)$$

$$\frac{d\ln T}{d\ln p} = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln p}\right)_s - \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{1-M^2}{\left[1+\Lambda M^2 + \Lambda_g \sin\theta\right]}. \quad (8)$$

Заметим, что для идеального газа и горизонтальной трубы, когда $n = \gamma = k$, $\hat{\beta} = 1$ и $\Lambda = k - 1$, уравнение (8) принимает известный классический вид [3]:

$$\frac{d\ln T}{d\ln p} = \frac{(k-1)M^2}{1+(k-1)M^2},$$

показывающий, как с увеличением числа Маха M температурный режим переходит от практически изотермического к практически адиабатическому.

Для идеального газа, горизонтальной трубы и течения без трения, но при наличии наружного охлаждения или подогрева (течение Релея) уравнение (8) также принимает известный вид [3]:

$$\frac{d\ln T}{d\ln p} = 1 - \frac{1}{kM^2}.$$

Уравнения (5) и (6) (или (7) и (8) в случае течения Fanno) могут быть решены с использованием стандартных численных методов. В частности, для решения уравнения (6) или (8) можно использовать стандартный метод Рунге–Кутта с постоянным шагом по логарифму давления, после чего для интегрирования уравнений (5) или (7) на той же сетке использовать квадратурные формулы (например, формулу Симпсона).

Околокритическое двухфазное газожидкостное течение

Покажем, что описанный выше подход применим и к околокритическому двухфазному течению, для которого можно вывести уравнения аналогичного вида.

Для описания течения двухфазной среды в трубе используем уравнения смешанной модели следующего вида [11–13]:

$$AG = W = \text{const}; \quad (9)$$

$$u_m dp + G^2 u_m du_m + u_m g \sin\theta \rho_{mv} dl + \frac{\lambda_{2ph}}{2D}G^2 u_m^2 = 0; \quad (10)$$

$$dh_m + G^2 u_m du_m + g\sin\theta dl + \frac{q}{W}dl = 0, \quad (11)$$

Здесь и далее используется следующая система индексов: g и l — величины соответственно для газовой и жидкой фазы; gl — разность между значениями для газовой и жидкой фаз; m — среднее по расходу значение для двухфазной смеси: $f_m = xf_g + (1 - x)f_l$, где x — массовое расходное газосодержание; mv — истинное среднее по объему, например, плотность $\rho_{mv} = \varepsilon\rho_g + (1 - \varepsilon)\rho_l$, где ε — истинное объемное газосодержание

$$\varepsilon = \left[1 + \left(\frac{1-x}{x}\right)\frac{u_l}{u_g}S\right]^{-1};$$

S — отношение скоростей газовой и жидкой фаз; $2ph$ — аналог для двухфазного продукта величины, ранее использованной для описания течения газа.

Уравнения (9)–(11) описывают смешанную модель равновесного разделенного и однородного (гомогенного) течения, при этом в уравнении (10) динамический член рассчитывается по однородной модели, а в остальных членах учитывается возможное проскальзывание фаз. Согласно монографии [13], такой подход хорошо описывает почти адиабатические течения и течения с вскипанием продукта и используется достаточно широко. Применение данной модели к течениям с конденсацией и интенсивным теплообменом с окружающей средой, а также к критическим течениям на коротких участках при очень низком газосодержании (когда имеет место термодинамическая неравновесность и задержка вскипания) обычно позволяет получить консервативную оценку пропускной способности системы.

Расчет в соответствии с данной моделью успешно реализован в программе «Гидросистема» (подробнее о программе см. [14–16]). Для расчета гидравлического трения и истинного объемного газосодержания разработано множество методик с различными областями применимости (подробнее о выборе методик и их реализации в программе «Гидросистема» см. [17, 18]). Обзор соответствующих методов расчета приведен также в [19, 20].

Учитывая соотношение

$$dh_m = Tds_m + u_m dp, \tag{12}$$

определим критическую массовую плотность потока из условия

$$G_c^2 \left(\frac{\partial u_m}{\partial p}\right)_{s_m} = -1, \quad G_c = \left[-\left(\frac{\partial u_m}{\partial p}\right)_{s_m}\right]^{-1/2},$$

а также критическую скорость и число Маха для двухфазного течения:

$$M = G/G_c = G\left[-\left(\frac{\partial u_m}{\partial p}\right)_{s_m}\right]^{1/2}; \quad w_c = u_m G_c.$$

Тогда для коэффициента изоэнтропы при двухфазном течении имеем

$$n_{2ph} = -\left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln u_m}\right)_{s_m} = -\frac{u_m}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial u_m}\right)_{s_m} = \frac{u_m G^2}{pM^2} \text{ и } w_c = \sqrt{n_{2ph} p u_m}.$$

С учетом (12) и соотношений

$$\frac{1}{T}\left(\frac{\partial u_m}{\partial s_m}\right)_p = \left(\frac{\partial u_m}{\partial h_m}\right)_p = \frac{\Lambda_{2ph}}{p},$$

где $\Lambda_{2ph} = \left(\frac{\partial p u_m}{\partial h_m}\right)_p$

из уравнений (10) и (11) получаем

$$\left[1-M^2\right]dp = -\left[1+M^2 n_{2ph}\Lambda_{2ph}\right]\lambda_{2ph} n_{2ph} M^2 \frac{p}{2D}dl = \left[1+M^2 n_{2ph}\Lambda_{2ph}(1-\eta^{-1})\right] g\rho_{mv}\sin\theta dl + M^2\frac{n_{2ph}}{u_m}\Lambda_{2ph}\frac{q}{W}dl;$$

$$Tds_m = \lambda_{2ph} G^2 \frac{u_m^2}{2D}dl - \frac{q}{W}dl - (1-\eta) g \sin\theta dl, \tag{13}$$

где η — поправка на проскальзывание фаз

$$\eta = u_m \rho_{mv} = \left(\frac{x}{\rho_g} + \frac{1-x}{\rho_l}\right)(\varepsilon\rho_g + (1-\varepsilon)\rho_l).$$

В итоге в безразмерном виде

$$\frac{d(l/D)}{d\ln p} = -\frac{1-M^2}{\left[1+(1-\Lambda_{q,2ph})n_{2ph}\Lambda_{2ph}M^2 + \left[1+M^2 n_{2ph}\Lambda_{2ph}(1-\eta^{-1})\right]\eta\Lambda_{g,2ph}\sin\theta\right]\lambda_{2ph}\frac{n_{2ph}}{2}M^2}, \tag{14}$$

$$\Lambda_{g,2ph} = \frac{2Dg}{\lambda_{2ph} u_m^2 G^2}, \quad \Lambda_{q,2ph} = \frac{2Dq/W}{\lambda_{2ph} u_m^2 G^2},$$

где безразмерные параметры $\Lambda_{g,2ph}$, $\Lambda_{q,2ph}$ имеют тот же смысл, что и для однофазного течения, а для встречающихся в (13) и (14) величин (1 – η) и (1 – η⁻¹) имеют место соотношения:

$$1-\eta=-\frac{x(1-x)(S-1)}{1+(1-x)(S-1)}u_{gl}\rho_{mv};\quad 1-\eta^{-1}=\frac{x(1-x)(S-1)}{1+(1-x)(S-1)}\frac{u_{gl}}{u_m}. \qquad (15)$$

Выведем теперь уравнение, выражающее зависимость dh_m от dp. Комбинируя уравнения (12), (13) и (14), получим

$$\frac{1}{pu_m}\frac{d(h_m)}{d\ln p}=1-\frac{(1-\Lambda_{q,2ph}-(1-\eta)\Lambda_{g,2ph})(1-M^2)}{1+(1-\Lambda_{q,2ph})n_{2ph}\Lambda_{2ph}M^2+\left[1+M^2n_{2ph}\Lambda_{2ph}(1-\eta^{-1})\right]\eta\Lambda_{g,2ph}\sin\theta}. \qquad (16)$$

Учитывая, что для изоэнтропного режима ds_m = 0 и, согласно уравнению (12),

$$\frac{1}{pu_m}\frac{d(h_m)}{d\ln p}=1,$$

уравнение (16) показывает, как по мере приближения течения к критическому термодинамический режим стремится к изоэнтропному.

Поскольку термодинамические параметры p и h_m полностью определяют термодинамическое состояние и все остальные теплофизические свойства двухфазной смеси, уравнение (16) можно решать соответствующим численным методом (например методом Рунге–Кутта) с использованием подходящей термодинамической библиотеки, после чего можно решить уравнение (14). Однако не все термодинамические пакеты поддерживают в полном объеме и достаточно эффективно расчет по давлению и энтальпии двухфазной смеси. В связи с этим обычно удобнее использовать уравнения для давления и температуры (для случая многокомпонентного не азеотропного продукта) или давления и газосодержания (для однокомпонентного продукта на линии насыщения).

Так, для **не азеотропной многокомпонентной смеси**

$$dh_m=c_{p,2ph}dT+\left(u_m-T\left(\frac{\partial u_m}{\partial T}\right)_p\right)dp=c_{p,2ph}dT+\left[u_m-u_m\beta_{2ph}T\right]dp=c_pTd\ln T+pu_m(1-\beta_{2ph})d\ln p;$$

из уравнения (16) получаем

$$\frac{1}{\Lambda_{2ph}}\frac{d\ln T}{d\ln p}=1-\frac{(1-\Lambda_{q,2ph}-(1-\eta)\Lambda_{g,2ph})(1-M^2)}{\beta_{2ph}\left[1+(1-\Lambda_{q,2ph})n_{2ph}\Lambda_{2ph}M^2+\left[1+M^2n_{2ph}\Lambda_{2ph}(1-\eta^{-1})\right]\eta\Lambda_{g,2ph}\sin\theta\right]}, \qquad (17)$$

где $c_{p,2ph}=\left(\frac{\partial h_m}{\partial T}\right)_p$ и $\hat{\beta}_{2ph}=\beta_{2ph}T=\left(\frac{\partial\ln u_m}{\partial\ln T}\right)_p$ рассчитываются с учетом изменения состава фаз при изменении температуры;

$$\Lambda_{2ph}=\left(\frac{\partial pu_m}{\partial h_m}\right)_p=\frac{pu_m}{T}\left(\frac{\partial\ln u_m}{\partial\ln T}\right)_p\Big/\left(\frac{\partial h_m}{\partial T}\right)_p=\frac{pu_m}{c_{p,2ph}T}\hat{\beta}_{2ph},$$

с учетом $Tds_m=c_{p,2ph}dT-T\left(\frac{\partial u_m}{\partial T}\right)_p dp=c_{p,2ph}Td\ln T-pu_m\hat{\beta}_{2ph}d\ln p$

имеем $\Lambda_{2ph}=\left(\frac{\partial\ln T}{\partial\ln p}\right)_{s_m}$.

Для расчета n_{2ph} и M можно использовать термодинамическое соотношение

$$\left(\frac{\partial u_m}{\partial p}\right)_{s_m}=\left(\frac{\partial u_m}{\partial p}\right)_T+\frac{T}{c_{p,2ph}}\left[\left(\frac{\partial u_m}{\partial T}\right)_p\right]^2$$

и соответственно

$$n_{2ph}=-\frac{u_m}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial u_m}\right)_{s_m}=-\frac{u_m}{p\left[\left(\frac{\partial u_m}{\partial p}\right)_T+\frac{T}{c_{p,2ph}}\left[\left(\frac{\partial u_m}{\partial T}\right)_p\right]^2\right]}=\left[\hat{\kappa}_{2ph}-\Lambda_{2ph}\beta_{2ph}\right]^{-1}, \qquad (18)$$

где $\widehat{\kappa}_{2ph} = -\left(\dfrac{\partial \ln u_m}{\partial \ln p}\right)_T$ — безразмерный коэффициент изотермной сжимаемости.

В частности, для случая **течения без массообмена** массовое расходное газосодержание и составы фаз постоянны, и

$$\widehat{\beta}_{2ph} = \left(\frac{\partial \ln u_m}{\partial \ln T}\right)_p = \varepsilon_{\text{H}}\widehat{\beta}_g + (1-\varepsilon_{\text{H}})\widehat{\beta}_l; \quad \widehat{\kappa}_{2ph} = -\left(\frac{\partial \ln u_m}{\partial \ln p}\right)_T = \varepsilon_{\text{H}}\widehat{\kappa}_g + (1-\varepsilon_{\text{H}})\widehat{\kappa}_l; \quad \Lambda_{2ph} = \frac{pu_m}{c_{p,2ph}T}\widehat{\beta}_{2ph};$$

$$c_{pm} = xc_{pg} + (1-x)c_{pl},$$

где $\varepsilon_{\text{H}} = xu_g/u_m$ — объемное газосодержание по однородной модели.

Заметим, что практически всегда сжимаемость жидкости на несколько порядков меньше сжимаемости газа, поэтому членом с $\widehat{\kappa}_l$ в выражении для $\widehat{\kappa}_{2ph}$ можно пренебречь (за исключением случаев, когда объемная доля газа очень мала). Тогда (учитывая, что обычно $\widehat{\beta}_l << \widehat{\beta}_g$) выражение (18) можно представить в виде

$$\frac{1}{n_{2ph}} \approx \varepsilon_{\text{H}}\widehat{\kappa}_g - \varepsilon_H \frac{pxu_g}{c_{pm}T}\widehat{\beta}_g^2\Upsilon, \quad \text{где } \Upsilon = \left[1 + \frac{(1-\varepsilon_{\text{H}})\widehat{\beta}_l}{\varepsilon_{\text{H}}\widehat{\beta}_g}\right]^2 \text{ близко к 1.}$$

Учитывая, что для газа также имеет место аналогичное соотношение $n_g = [\widehat{\kappa}_g - \Lambda_g\widehat{\beta}_g]^{-1}$, а также что

$$n_g\Lambda_g = n_g\frac{ZR}{c_{pg}}\widehat{\beta}_g = (k-1)/\widehat{\beta}_g,$$

где $k = c_{pg}/c_{vg}$, после преобразований получаем следующую формулу для n_{2ph}:

$$n_{2ph} \approx \frac{1}{\varepsilon_{\text{H}}}\frac{n_g}{k}\frac{xc_{pg} + (1-x)c_{pl}}{xc_{pg}(1-\Upsilon+\Upsilon/k) + (1-x)c_{pl}}. \tag{19}$$

Уравнение (19) представляет собой обобщение на случай смеси реальных газа и жидкости известной формулы Тангрена для коэффициента изоэнтропы смеси идеальных газа и жидкости (см., например, [21]):

$$n_{2ph} \approx \frac{1}{\varepsilon_{\text{H}}}\frac{xc_{pg} + (1-x)c_{pl}}{xc_{pg}/k + (1-x)c_{pl}}.$$

Для однокомпонентной смеси на линии насыщения

$$dh_m = h_{gl}dx + c_{pm}\frac{dT_{sat}}{dp}dp + \left(u_m - T_{sat}\left(\frac{\partial u_m}{\partial T}\right)_{p,x}\right)dp = h_{gl}dx + \left[pu_m + c_{pm}T_{sat}\frac{pu_{gl}}{h_{gl}} - pT_{sat}\left(\frac{\partial u_m}{\partial T}\right)_{p,x}\right]d\ln p,$$

и из уравнения (16) получаем

$$\frac{dx}{d\ln p} = \frac{u_m}{u_{gl}}\Lambda_{2ph}\left\{\widehat{\beta}_m - \frac{c_{pm}T_{sat}}{pu_m}\Lambda_{2ph} - \frac{(1-\Lambda_{q,2ph} - (1-\eta)\Lambda_{g,2ph})(1-M^2)}{1 + (1-\Lambda_{q,2ph})n_{2ph}\Lambda_{2ph}M^2 + \left[1 + M^2 n_{2ph}\Lambda_{2ph}(1-\eta^{-1})\right]\eta\Lambda_{g,2ph}\sin\theta}\right\}. \tag{20}$$

При этом, согласно уравнению Клаузиуса–Клапейрона

$$\Lambda_{2ph} = \left(\frac{\partial pu_m}{\partial h_m}\right)_p = \frac{pu_{gl}}{h_{gl}} = \frac{p}{T}T\frac{u_{gl}}{h_{gl}} = \frac{d\ln T_{sat}}{d\ln p},$$

Λ_{2ph} — тангенс линии насыщения в логарифмических координатах.

Выведем формулы для расчета n_{2ph} (и тем самым M) в переменных p, x. Имеем

$$\left(\frac{\partial u_m}{\partial p}\right)_{s_m,sat} = \left(\frac{\partial u_m}{\partial p}\right)_{x,sat} + \left(\frac{\partial u_m}{\partial x}\right)_p\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)_{s_m,sat},$$

где sat в индексе обозначает, что дифференцируемая функция берется на линии насыщения. Чтобы вывести формулу для $(\partial x/\partial p)_{s_m,sat}$, заметим, что $dh = Tds + udp$ и при постоянной энтропии $ds = 0$, а $dh = udp$. С другой стороны,

$$dh_m = h_{gl}dx + \left(\frac{\partial h_m}{\partial p}\right)_{x,sat}dp,$$

и при постоянной энтропии получаем уравнение

$$u_m dp = h_{gl} dx + \left(\frac{\partial h_m}{\partial p}\right)_{x,sat} dp, \text{ откуда } \left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)_{s_m,sat} = \frac{1}{h_{gl}}\left[u_m - \left(\frac{\partial h_m}{\partial p}\right)_{x,sat}\right].$$

Поскольку $\left(\frac{\partial u_m}{\partial x}\right)_p = u_{gl}$, имеем $\left(\frac{\partial u_m}{\partial p}\right)_{s_m,sat} = \frac{u_{gl}}{h_{gl}}\left[u_m - \left(\frac{\partial h_m}{\partial p}\right)_{x,sat}\right] + \left(\frac{\partial u_m}{\partial p}\right)_{x,sat}$.

Далее,

$$\left(\frac{\partial u_m}{\partial p}\right)_{x,sat} = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_T\right]_m + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_p\right]_m \frac{dT_{sat}}{dp}, \ \left(\frac{\partial h_m}{\partial p}\right)_{x,sat} = \left[\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T\right]_m + \left[\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p\right]_m \frac{dT_{sat}}{dp} = u_m - T\left[\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_p\right]_m + c_{pm}\frac{dT_{sat}}{dp}$$

и в итоге

$$\left(\frac{\partial u_m}{\partial p}\right)_{s_m,sat} = \frac{u_{gl}}{h_{gl}}\left[T\left[\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_p\right]_m - c_{pm}\frac{dT_{sat}}{dp}\right] + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_T\right]_m + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_p\right]_m \frac{dT_{sat}}{dp}.$$

Учитывая, что $\frac{dT_{sat}}{dp} = T\frac{u_{gl}}{h_{gl}}$, получаем

$$\left(\frac{\partial u_m}{\partial p}\right)_{s_m,sat} = -c_{pm}T\left(\frac{u_{gl}}{h_{gl}}\right)^2 + 2T\frac{u_{gl}}{h_{gl}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_p\right]_m + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_T\right]_m.$$

Здесь $T\left[\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_p\right]_m = xu_g\hat{\beta}_g + (1-x)u_l\hat{\beta}_l, \quad p\left[\left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_T\right]_m = -xu_g\hat{\kappa}_g - u_l(1-x)\hat{\kappa}_l$ и

$$n_{2ph} = -\left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln u_m}\right)_{s_m,sat} = -\frac{u_m}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial u_m}\right)_{s_m,sat} = \left[\frac{c_{pm}Tp}{u_m}\left(\frac{u_{gl}}{h_{gl}}\right)^2 - 2\frac{pu_{gl}}{u_m h_{gl}}(xu_g\hat{\beta}_g + (1-x)u_l\hat{\beta}_l) + \frac{1}{u_m}(xu_g\hat{\kappa}_g + u_l(1-x)\kappa_l)\right]^{-1} =$$

$$= \left[\varepsilon_{\text{н}}\frac{\gamma}{\gamma-1}\Psi\Lambda_{2ph}^2 - 2\Lambda_{2ph}(\varepsilon_{\text{н}}\hat{\beta}_g + (1-\varepsilon_{\text{н}})\hat{\beta}_l) + (\varepsilon_{\text{н}}\hat{\kappa}_g + (1-\varepsilon_{\text{н}})\hat{\kappa}_l)\right]^{-1}, \qquad (21)$$

где $\gamma = \frac{c_{pg}}{c_{pg} - ZR}, \ \Psi = 1 + \frac{(1-x)c_{pl}}{xc_{pg}}$.

Уравнение (21) дает общую формулу для расчета коэффициента изоэнтропы двухфазной однокомпонентной смеси на линии насыщения. Если считать жидкую и газовую фазы идеальными, то $\hat{\beta}_l = \hat{\kappa}_l = 0$ и $\hat{\beta}_g = \hat{\kappa}_g = 1$, тогда (21) переходит в уравнение, используемое в известном омега-методе расчета критических двухфазных течений [22].

Предложенные в статье уравнения и методы их решения для околокритического течения двухфазных газо-жидкостных потоков были успешно реализованы ООО «НТП Трубопровод» с использованием различных термодинамических пакетов в программе «Предклапан» расчета и выбора предохранительных клапанов и оказались весьма эффективными и удобными для применения.

Автор благодарен сотрудникам ООО «НТП Трубопровод» Е. Ф. Юдовиной, А. В. Бабенко и С. Ю. Лисину, обеспечившим реализацию изложенного в статье подхода в программе «Предклапан».

Литература

1. *Дейч М. Е.* Техническая газодинамика. — М.: Энергия, 1974. — 592 с.
2. *Дейч М. Е., Зарянкин А. Е.* Гидрогазодинамика. — М.: Энергоатомиздат, 1984. — 384 с.
3. *Shapiro A. H.* The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow. V. 1. — New York: The Ronald Press Company, 1953. — 647 p.
4. *Benedict R. P.* Fundamentals of Pipe Flow. — New York: A Wiley-InterScience Publication, 1980. — 529 p.

5. *Anderson J. D*. Modern Compressible Flow with Historical Perspective. — New York: McGraw-Hill Publishing Company, 1990. — 671 p.
6. *Идельчик И. Е*. Справочник по гидравлическим сопротивлениям. — М.: Машиностроение, 1992. — 672 с.
7. Справочник по расчетам гидравлических и вентиляционных систем. — СПб.: Мир и семья, 2002. — 1154 с.
8. СП 61.13330.2012. Тепловая изоляция оборудования и трубопроводов. Актуализированная редакция СНиП 41-03–2003.
9. ASTM Standard C680-10. Standard Practice for Estimate of the Heat Gain or Loss and the Surface Temperatures of Insulated Flat, Cylindrical, and Spherical Systems by Use of Computer Programs.
10. ISO 12241–2008. Thermal Insulation for Building Equipment and Industrial Installations — Calculation Rules.
11. *Уоллис Г*. Одномерные двухфазные течения. — М.: Мир, 1972. — 442 с.
12. *Чисхолм Д*. Двухфазные течения в трубопроводах и теплообменниках. — М.: Недра, 1986. — 204 с.
13. *Azzopardi B. J*. Gas-Liquid Flows. — New York: Begell House, 2006. — 331 p.
14. *Юдовина Е. Ф., Пашенкова Е. С., Корельштейн Л. Б*. Программный комплекс «Гидросистема» и его использование для гидравлических расчетов трубопроводных систем // В кн.: Математическое моделирование трубопроводных систем энергетики. Тр. XII Всеросс. научн. семин. с междунар. участ. «Математические модели и методы анализа и оптимального синтеза развивающихся трубопроводных и гидравлических систем», 20–26 сентября 2010 г. — Иркутск, ИСЭМ СО РАН, 2010. — С. 475–485.
15. *Корельштейн Л. Б., Юдовина Е. Ф*. «Гидросистема»: в преддверии фазового перехода // CADmaster. — 2010. — Т. 53. — № 3. — С. 82–86.
16. *Корельштейн Л. Б., Юдовина Е. Ф.* «Гидросистема»: Сюрпризы версии 3.70 // Там же. — 2011. — Т. 58. — № 3. — С. 78–81.
17. *Юдовина Е. Ф. Бабенко А. В*. Автоматизация выбора методик двухфазного расчета // Там же. — С. 82.
18. *Бабенко А. В., Корельштейн Л. Б., Гартман Т. Н*. Математическое моделирование установившегося течения газожидкостных потоков в промышленных трубопроводах. Расчет ветвей // Химическая технология. — 2012. — Т. 13. — № 7. — С. 429–439.
19. IHS ESDU 01014. Frictional Pressure Gradient in Adiabatic Flows of Gas-Liquid Mixtures in Horizontal Pipes: Prediction Using Empirical Correlations and Database. — 2007.
20. *Ghajar A. J., Woldesemayat M. A*. Comparison of Void Fraction Correlations for Different Flow Patterns in Horizontal and Upward Inclined Pipes // Int. J. Multiphase Flow. — 2007. — V. 33. — P. 347–370.
21. *Morris S. D*. Vapour Adiabatic Exponent for Flashing Flow in Nozzles // Chemical Engineering and Processing. — 2000. — V. 39. — P. 275–281.
22. API STD 520. Sizing, Selection, and Installation of Pressure-Relieving Devices in Refineries. Part 1. Sizing and Selection. — 8th ed., 2008.
23. *Attou A*. Thermodynamique de L'Ecoulement Diphasique Compressible a deux Constituants de Fanno // Revue de L'Institut Francais du Petrole. — 1998. — V. 53. — N 6. — P. 813–837.

L. B. Korelshteyn
NTP Truboprovod

On One Form of Equations of Chocked Flow in Pipes

The form of ordinary differential equations of real gas or two-phase gas-liquid flow in the pipe, which is optimized for numerical integration in the case when flow is almost chocked (Mach number close to 1), is presented.

Key words: real gas flow in pipes, two-phase gas-liquid flow, almost chocked flow, Mach number.