

Расчет потокораспределения для двухфазного газо-жидкостного течения в промышленных разветвленных трубопроводах

А. В. Бабенко, Т. Н. Гартман, Л. Б. Корельштейн

В статье предложена новая методика расчета потокораспределения при течении двухфазных газо-жидкостных смесей в трубопроводах сложной топологии, состоящая в расширении области применения метода глобального градиента на двухфазные потоки.

Ключевые слова: потокораспределение, разветвленный трубопровод, метод глобального градиента, газо-жидкостное течение, двухфазное течение.

Постановка задачи и метод Global Gradient Algorithm (GGA)

Напомним кратко суть метода GGA для расчета потокораспределения в гидравлических сетях [7, 8].

Алгоритм GGA был первоначально сформулирован профессором Болонского университета Ezio Todini в 1979 г. [1] и совместно с коллегами позднее предложен для практического использования в работах [2–4]. В 2004 г. он также был описан отечественными специалистами С. П. Епифановым, Н. Н. Новицким, В. П. Фроловым в монографии [5, раздел 1.6.4]. Этот алгоритм по форме весьма схож с предложенным Меренковым и Хасилевым методом МКРДГК в классической монографии [6], имеет такую же хорошую сходимость, как известный метод контурных расходов МКР [6], но при этом не требует анализа топологии трубопровода и выбора системы главных контуров. К настоящему времени метод успешно используется для расчета трубопроводов в разработанной ООО «НТП Трубопровод» и получившей широкое распространение в России программе «Гидросистема» [9, 10], а также при расчете наружных инженерных сетей в таких известных программах, как некоммерческая программа EPANET [15] и программы фирмы Haestad Methods [16].

Рассмотрим описывающий гидравлическую сеть связный ориентированный граф с m узлами и n ветвями. Тогда уравнения, описывающие цепь, можно записать в виде

$$A^T P = F(X), \quad (1)$$

$$AX = Q, \quad (2)$$

где A — матрица соединений; X — вектор массовых расходов по ветвям; Q — вектор внешних массовых притоков в узел; P — вектор узловых потенциалов (в качестве потенциалов может быть целесообразно выбрать давления, напоры или другие величины, в зависимости от типа трубопровода); $F(X)$ — вектор-функция потерь

потенциала на ветвях; $f_j(x_j) = \Delta p_j$ — потери потенциала на j -ой ветви (пока будем считать, что она зависит только от расхода в той же ветви).

Метод GGA не является вполне универсальным, а применим только в случае, если заданными являются потенциалы в m_0 узлах ($1 \leq m_0 \leq m$) и величины притоков в остальных $m_1 = m - m_0$ узлах. Перенумеруем узлы так, чтобы сначала шли узлы с заданными притоками, а затем с заданными давлениями, тогда матрицы и вектора можно представить в блочном виде

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

и уравнения (1), (2) запишутся как

$$A_1^T P_1 = F(X) - A_0^T P_0, \quad (4)$$

$$A_1 X = Q. \quad (5)$$

Идея метода GGA заключается в решении нелинейной (вообще говоря) системы уравнений (4), (5) методом Ньютона, не выражая P_1 через X (как в МКР) или наоборот (метод узловых давлений — МД), а оставляя их независимыми переменными (отсюда слово «глобальный» в названии метода).

Линеаризуя вектор-функцию F из (4), (5) получаем

$$F(X^{(i)}) + D(X^{(i)})dX^{(i)} - A_0^T P_0 = A_1^T P_1^{(i)} + A_1^T dP_1^{(i)}, \quad (6)$$

$$A_1 X^{(i)} + A_1 dx^{(i)} = Q_1, \quad (7)$$

откуда

$$dX^{(i)} = D(X^{(i)})^{-1} [A_1^T dP_1^{(i)} + A_1^T P_1^{(i)} - F(X^{(i)})] = D(X^{(i)})^{-1} [A_1^T P_1^{(i+1)} - F(X^{(i)})]. \quad (8)$$

Подставляя $dX^{(i)}$ из (8) в (7), в итоге получим

$$M(X^{(i)})dP_1^{(i)} = Q_1 - A_1 X^{(i)} - A_1 D(X^{(i)})^{-1} [A_1^T P_1^{(i)} - F(X^{(i)})], \quad (9)$$

где $M(X^{(i)}) = A_1 D(X^{(i)})^{-1} A_1^T$ — матрица Максвелла. Если $d_{jj} = df(x_j)/dx_j$ всегда положительны, $M(X^{(i)})$ является симметричной положительно определенной (и, следовательно, невырожденной), из (9) получаем

$$dP_1^{(i)} = M(X^{(i)})^{-1} \{Q_1 - A_1 X^{(i)} - A_1 D(X^{(i)})^{-1} [A^T P^{(i)} - F(X^{(i)})], \quad (10)$$

$$P_1^{(i+1)} = P_1^{(i)} + dP_1^{(i)} = M(X^{(i)})^{-1} \{Q_1 - A_1 X^{(i)} - A_1 D(X^{(i)})^{-1} [A_0^T P_0 - F(X^{(i)})]\} \quad (11)$$

и из (8)

$$X^{(i+1)} = X^{(i)} + dX^{(i)} = X^{(i)} + D(X^{(i)})^{-1} [A^T P^{(i+1)} - F(X^{(i)})]. \quad (12)$$

Из (11) и (12) легко проверить, что $A_1 X^{(i)} = Q_1$, то есть линейное уравнение 1-го закона Кирхгофа удовлетворяется уже после первой итерации (при том что начальное приближение $P_1^{(0)}, X^{(0)}$ может не удовлетворять обоим уравнения (4), (5)).

Таким образом, при $i \geq 1$ уравнения (10), (11) еще более упрощаются и принимают вид

$$dP_1^{(i)} = -M(X^{(i)})^{-1} \times A_1 D(X^{(i)})^{-1} [A^T P^{(i)} - F(X^{(i)})], \quad (10')$$

$$P_1^{(i+1)} = P_1^{(i)} + dP_1^{(i)} = -M(X^{(i)})^{-1} A_1 D(X^{(i)})^{-1} [A_0^T P_0 - F(X^{(i)})]. \quad (11')$$

Тем самым метод GGA сводит задачу на каждой итерации к решению системы линейных уравнений (9) с матрицей Максвелла $M(X^{(i)})$ — являющейся симметричной, положительно определенной и разреженной (m_1 элементов по диагонали и не более n ненулевых элементов с каждой стороны диагонали) с диагональным доминированием. Хотя размерность матрицы Кирхгофа в «классическом» МКР меньше размерности матрицы Максвелла, число ненулевых элементов в матрице Максвелла может быть значительно меньше. Учитывая, что существуют готовые высокоэффективные алгоритмы и готовые библиотеки подпрограмм для факторизации и обращения таких матриц, использование уравнений с матрицей Максвелла оказывается более эффективным с вычислительной точки зрения. Более того, недавний прорыв в алгоритмах факторизации матриц данного вида (см., например [11]) открывает возможности эффективного расчета трубопроводных систем очень большой размерности.

Постановка задачи расчета изотермического двухфазного течения без массообмена

Рассмотрим гидравлическую цепь, описываемую связным ориентированным графом G с m узлами и n ветвями. Тогда уравнения, описывающие установившееся двухфазное газожидкостное изотермическое течение, можно записать в виде

$$A^T P = F(X, P, E),$$

$$AX = Q,$$

где E — вектор массовых газосодержаний по ветвям; $f_j(x_j, p_{n,j}, e_{n,j}) = \Delta p_j$ — потери потенциала на j -ой ветви, в данном случае зависящее от начального давления и газосодержания ветви.

При этом ориентация ветвей принимается совпадающей с направлением потоков (т. е. $x_j \geq 0$).

Заданными считаются потенциалы в m_0 узлах ($1 \leq m_0 \leq m$) и величины узловых расходов в остальных $m_1 = m - m_0$ узлах, а также массовые газосодержания всех притоков и начальные (в рассматриваемом изотермическом случае они же конечные) температуры на каждой ветви.

Опишем вид функции f для ветвей трубопроводов, используемых в случае перекачки двухфазного газожидкостного продукта.

Каждая ветвь считается состоящей из одного или нескольких последовательно соединенных элементов — прямых участков или местных сопротивлений. Для j -й ветви, включающей N_j элементов, давления последовательно рассчитываются вдоль ветви:

$$y_j = f_j(x_j, p_{n,j}, e_{n,j}) = \sum_{k=1}^{N_j} y_j^{(k)} = \sum_{k=1}^{N_j} f_j^{(k)}(x_j, p_{n,j}^{(k)}, e_{n,j}^{(k)}) \quad (12)$$

где $p_{n,j}^{(k)}, p_{k,j}^{(k)}, e_{n,j}^{(k)} = e_{k,j}^{(k)}$ — соответственно потенциал, и массовое газосодержание в начале и в конце k -го элемента ветви, а $y_j^{(k)}$ — падение давления на этом элементе.

Функция $f_j^{(k)}$ для отдельных элементов получают интегрированием уравнения сохранения движения, лежащего в основе модели равновесного разделенного течения SFM (Separated Flow Model) [12].

Согласно рекомендациям Azzopardi [13, стр. 16], потери на ускорение при адиабатическом течении и при течении с кипением считаются по модели однородного течения (без «проскальзывания» фаз) НЕМ (Homogeneous Model) [12]. При расчете технологических трубопроводов с

двухфазными потоками в основном имеет место такой вид течения, поэтому было принято решение использовать эти рекомендации. Для замороженного течения, однако, авторам неизвестны подобные рекомендации, поэтому в дальнейшем возможна реализация более общего случая.

Для модели НЕМ

$$\varepsilon = (\rho_m / \rho_g) x, \quad (13)$$

где ρ_g, ρ_m — плотность газа, жидкости, кг/м³; ε — объемное газосодержание/

Тогда средняя массовая плотность и удельный объем смеси равны:

$$\rho_m = \varepsilon \rho_g + (1 - \varepsilon) \rho_l = [x/\rho_g + (1 - x)/\rho_l]^{-1}, \quad (14)$$

$$u_m = x u_g + (1 - x) u_l = [\varepsilon/u_g + (1 - \varepsilon)/u_l]^{-1}, \quad (15)$$

С учетом (13)–(15), уравнение сохранения движения примет вид:

$$\frac{dp}{dl} = \left(\frac{dp}{dl} \right)_f - G^2 \frac{du_m}{dl} - g \rho_{mv} \sin \theta - dp_{local}.$$

где dp/dl — общие потери давления на единицу длины, Па/м; $(dp/dl)_f$ — потери давления от трения на единицу длины, Па/м; dp_{local} — потери на местных сопротивлениях на единицу длины, Па; $\rho_{mv} = \varepsilon \rho_g + (1 - \varepsilon) \rho_l$ — объемная плотность смеси, кг/м³; $G = WA$ — массовая скорость потока, кг/(м² с); $W = W_g + W_l$ — массовый расход, кг/с; W_g, W_l — массовый расход газа, жидкости, кг/с; A — площадь поперечного сечения трубы, м²; g — ускорение свободного падения, м/с²; θ — угол подъема трубы относительно горизонта, рад.

При расчете участков конечные давления считаются по формуле (16). Расчет проходит итерационно, при этом длинные участки разбиваются на более мелкие для более точного учета изменения свойств продукта по ходу течения.

$$p_m^k = p_m^h - \Delta p_f - G^2 (u_m^h - u_m^k) - L g \rho_{mv} \sin \theta - \Delta p_{local}. \quad (16)$$

В полученной смешанной модели динамические потери считаются по модели НЕМ, остальные потери (потери на трение, гидростатические потери, потери на местных сопротивлениях и др.) считаются по различным методикам двухфазного расчета, которые описаны в документации программы «Гидросистема» и статье [14].

Особенности расчета изотермического двухфазного течения без массообмена

Можно выделить три основные особенности расчета изотермического двухфазного течения без массообмена с точки зрения реализации для них метода GGA.

1. Начальное приближение для массовых газосодержаний. В случае одного узла с прито-

ком массовое газосодержание на всех ветвях принимается равным массовому газосодержанию, заданному в этом притоке. В случае нескольких узлов с притоками массовое газосодержание в остальных ветвях для первой итерации GGA принимается равным усредненному значению заданных массовых газосодержаний в притоках:

$$e_0 = \left(\sum_{k=0}^N e_{np}^{(k)} \right) / N,$$

где $e_{np}^{(k)}$ — заданное массовое газосодержание в каждом из N притоков; e_0 — начальное приближение для остальных ветвей.

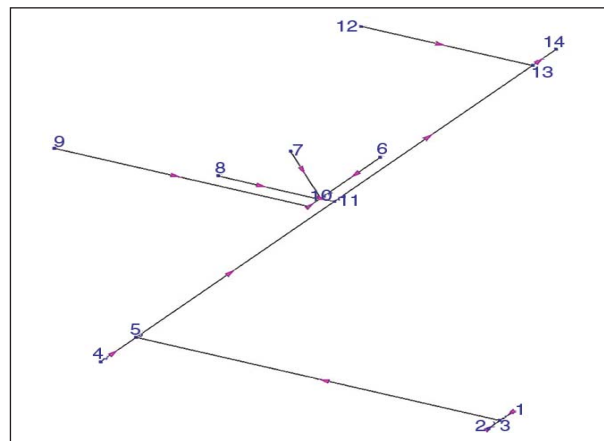
2. Пересчет газосодержаний в узлах слияния и разделения потоков. При итерационном расчете двухфазных потоков по методу GGA в случае задания различных значений массовых газосодержаний в источниках начальные газосодержания в остальных ветвях начинают зависеть от потокораспределения. Поэтому для корректного расчета потерь давлений на ветвях по формуле (12) возникает необходимость пересчета начальных газосодержаний $e_{H,j}$.

Изменение газосодержания происходит в узлах слияния потоков и зависит от расходов и газосодержаний на ветвях, входящих в узел.

$$e_{вых} = \sum_{k=0}^N W_g^{(k)} / \left(\sum_{k=0}^N W_g^{(k)} + \sum_{k=0}^N W_l^{(k)} \right), \quad (17)$$

где $\sum_{k=0}^N W_g^{(k)}$ и $\sum_{k=0}^N W_l^{(k)}$, соответственно, суммы массовых расходов газа и жидкости в N входящих в узел ветвях.

На данный момент эффект возможной сепарации в узлах разделения потоков (в тройниках) не учитывается, поэтому газосодержание во всех выходящих из узла ветвях принимается равным $e_{Вых}$.



Пример нефтесборного трубопровода

Табл. 1. Список исходных данных по ветвям

Ветвь	Узлы		Начальные значения				
	Начальный	Конечный	Внутренний диаметр, мм	Наружный диаметр, мм	Расход, кг/ч	Массовое газосодержание	Давление, МПа
Скв. 23 — вр. 1	1	3	30	89	5280	0,01	0,6083
Скв. 3. — вр. 1	2	3	80	89	1177	0,01	0,6071
Вр. 1 — вр. 2	3	5	80	89	6457	0,01	
Скв. 22 — вр. 2	4	5	80	89	2431	0,01	0,5771
Вр. 2 — вр.3	5	11	80		8888	0,01	
Скв. 18 — АГЗУ	7	10	80	39	1870	0,01	0,6167
Скв. 19 — АГЗУ	8	10	80	89	3740	0,01	0,6228
Скв. 16 — АГЗУ	9	10	80	89	5995	0,01	0,6393
Скв. 21 — АГЗУ	6	10	80	89	2838	0,01	0,6224
АГЗУ — вр. 3	10	11	150		14443		
Вр. 3 — вр. 4	11	13	150		23331		
Скв. 15 — вр. 4	12	13	80	89	8250	0,02	0,5207
Вр. 4 — УПС	13	14	200		31581		

Для учета изменения газосодержания на ветвях в алгоритм GGA на каждой итерации был добавлен пересчет газосодержания согласно описанной выше методике на всех узлах.

3. Численное дифференцирование функции потерь на ветвях. В процессе расчета по методу GGA необходимо вычислять производные функции потерь

$$\frac{dy_j}{dx_j} = \frac{df_j(x_j, p_{n,j}, e_j)}{dx_j} \quad (18)$$

В случае двухфазных потоков аналитическое нахождение производной (18) затруднительно, поэтому производная рассчитывается численно, методом конечных разностей.

Проверка работоспособности методики

Описанная выше методика была реализована в программе «Гидросистема» и опробована в режиме бета-тестирования для расчета технологических трубопроводов и трубопроводов обвязки нефтегазовых месторождений. Результаты тестирования на реальных примерах показали эффективность и хорошую сходимость предложенного метода в области докритических течений.

В качестве примера приведен расчет нефтесборного трубопровода, состоящий из 13 ветвей, 8 источников и 1 потребителя (рисунок, табл. 1, 2). Заданы давления во всех источниках и потребителях, а также начальные приближения по расходам на всех ветвях, т. е. стоит задача расчета пропускной способности трубопровода.

Табл. 2. Результаты по ветвям

Ветвь	Расход, кг/ч	Массовое газосодержание	Длина, м	Диаметр, мм	Максимальные			Потери давления, кПа			Давление, МПа	
					Объемное газосодержание	Скорость, м/с	Число Маха	Трение	Местные	Динамические	начальное	конечное
Скв. 23 – вр. 1	5617,3	0,01	24,7	80	0,48	0,61	0,02	1,13	0,01	0	0,61	0,61
Скв. 3. – вр. 1	-1836,2	0,01	10	30	0,45	0,19	0 01	0 06	0	0	0,61	0,61
Вр. 1 — вр. 2	3781,1	0,01	530	80	0,48	0,41	0,01	11,70	0	0	0,61	0,60
Скв. 22 – вр. 2	-12217,4	0,01	90	80	0,51	1,42	0,04	18,31	0,02	0,03	0,58	0,60
Вр. 2 – вр.3	-8436,3	0,01	500	80	0,51	0,97	0,03	50,21	0,01	0,04	0,60	0,65
Скв. 18 – АГЗУ	23223,5	0,01	100	80	0,53	2,80	0,08	68,73	0,08	0,40	0 62	0,55
Скв. 19 – АГЗУ	23873,0	0,01	100,2	80	0 53	2,88	0,08	72 37	2,48	0,45	0,62	0,55
Скв. 16 – АГЗУ	13478,9	0,01	380,2	80	0,52	1,58	0,05	90,79	0,85	0,17	0,64	0,55
Скв. 21 – АГЗУ	19650,4	0,01	150	80	0,53	2,35	0,07	74,54	0,06	0 30	0,62	0,55
АГЗУ – вр. 3	80222,7	0,01	5	150	0,52	2,83	0,07	1,77	-100	0,01	0,55	0,65
Вр. 3 – вр. 4	717364	0,01	500	150	0 56	2,61	0 03	143 03	0,07	0,63	0,65	0,50
Скв. 15 – вр. 4	6183,3	0,02	250	80	0,64	0,95	0,03	23,73	0,01	0,03	0,52	0,50
Вр. 4 – УПС	77969,7	0,01079	60	200	0,57	1,64	0,05	5,60	0,03	0,01	0,50	0,49

Температура во всех ветвях принимается равной 20°C. Массовое газосодержание задано во всех источниках, т.е. массовое газосодержание в потребителе должно рассчитаться. В качестве продукта задана двухфазная смесь водо-нефтяной эмульсии и попутных нефтяных газов.

Как видно из табл. 2, расходы на ветвях в процессе расчета были пересчитаны. В некоторых ветвях расход получился отрицательный, что говорит о том, что направление ветви в исходных данных задано неверно. Также в табл. 2 видно, что массовые газосодержания на промежуточных ветвях и в потребителе были рассчитаны.

Данный расчет сошелся за 7 итераций GGA, что вполне приемлемо для практических расчетов.

Выводы

Предложена методика расчета потоко-распределения двухфазных газо-жидкостных смесей в трубопроводах сложной топологии. Особенность методики состоит в расширении области применения метода GGA на двухфазные потоки. На данный момент предложенный метод ограничен применимостью только к изотермическому двухфазному течению без учета массообмена в трубопроводах без рециклов. Методика реализована в расчетной библиотеке программы «Гидросистема» и проверена на ряде практических примеров.

Литература

1. *Todini E.* Un metodo del gradiente per la verifica delle reti idrauliche // Bollettino degli Ingegneri della Toscana. — 1979. — n. 11:11-14.
2. *Todini E., Pilati S.* A gradient algorithm for the analysis of pipe networks. In B. Coulbeck and C.H. Orr (eds) Computer Applications in Water Supply. — Vol. 1 (System analysis and simulation). — London: John Wiley & Sons, 1988. — P. 1–20.
3. *Salgado R., Todini E., O'Connell P.E.* Comparison of the gradient method with some traditional methods for the analysis of Water Supply and Distribution. In B. Coulbeck and C.H. Orr (eds) Computer Applications in Water Supply. — Vol. 1 (System analysis and simulation). — London: John Wiley & Sons, 1988. — P. 38–62.
4. *Todini E.* A Unifying View on the Different Looped Pipe Network Analysis Algorithms. In R. Powell and K.S.Hindi (eds) Computing and Control for the Water Industry. Baldock, UK: Research Studies Press Ltd., 1999. — P. 63–80.
5. Трубопроводные системы энергетики. Управление развитием и функционированием. — Новосибирск, Наука, 2004.
6. *Меренков А. П., Хасилев В. Я.* Теория гидравлических цепей. — М.: Наука, 1985.
7. *Корельштейн Л. Б., Пашенкова Е. С.* Опыт использования метода глобального градиента при расчете установившегося изотермического течения жидкостей и газов в трубопроводах. В кн.: Трубопроводные системы энергетики. — Новосибирск, Наука, 2008. — С.80–89.
8. *Корельштейн Л. Б., Пашенкова Е. С.* Опыт использования методов глобального градиента и декомпозиции при расчете установившегося неизолированного течения жидкостей и газов в трубопроводах. В кн.: Трубопроводные системы энергетики. Математическое моделирование и оптимизация. — Новосибирск, Наука, 2010. — С. 103–114.
9. *Юдовина Е. Ф., Пашенкова Е. С., Корельштейн Л. Б.* Программный комплекс «Гидросистема» и его использование для гидравлических расчетов трубопроводных систем. В кн.: Математическое моделирование трубопроводных систем энергетики // Тр. XII Всеросс. научн. семина. с междунар. участ. «Математические модели и методы анализа и оптимального синтеза развивающихся трубопроводных и гидравлических систем», 20–26 сентября 2010 г. — Иркутск, ИСЭМ СО РАН, 2010. — С. 475–485.
10. *Корельштейн Л. Б., Юдовина Е. Ф.* «Гидросистема»: в преддверии фазового перехода // CADmaster. — 2010. — №3. — С. 82–86.
11. *Koutis I., Miller G. L., Peng R.* A nearly m log n time solver for SDD linear systems. 52nd Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science. (<http://arxiv.org/abs/1102.4842>).
12. *Уоллис Г.* Одномерные двухфазные течения. — М.: Мир, 1972. — 440 с.
13. *Azzopardi B. J.* Gas-liquid flows. — USA, Begell House, Inc, 2006. — 331 с.
14. *Бабенко А. В., Корельштейн Л. Б., Гартман Т. Н.* Математическое моделирование установившегося течения двухфазных газожидкостных потоков в промышленных трубопроводах. Часть 1: Расчет ветвей. Химическая технология. В печати.
15. <http://www.epa.gov/nrmrl/wswrd/epanet.html>.
16. <http://www.bentley.com/ru-RU/Products/Water+and+Wastewater+Network+Analysis+and+Design>.

A.V. Babenko, T.N. Gartman., L.B. Korelstein

Flow Distribution Calculation for Two-phase Gas-liquid Flow in Industrial Branched Pipelines

The new calculation method of two-phase flow distribution is proposed. The proposed method is the extension of sphere of application of Global Gradient Algorithm (GGA) for two-phase flow.

Key words: pipeline, piping network, flow distribution, Global Gradient Algorithm, gas-liquid flow, two-phase flow, frozen flow.