ЕЩЕ РАЗ О РАСЧЕТЕ СМАЧИВАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ ВЫПУКЛЫХ ДНИЩ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Корельштейн Л. Б., заместитель директора ООО «НТП Трубопровод», Москва

В предыдущих статьях в ТПА [1, 2] уже обсуждалась важность правильного и точного расчета смачиваемой поверхности аппаратов для корректного определения тепловых потоков и, в частности, расчета систем аварийного сброса. Были заполнены те пробелы, которые существовали по данному вопросу, и предложены инженерные формулы для расчета смачиваемой поверхности полуэллиптических, выпуклых и торосферических днищ горизонтальных аппаратов.

При этом точная формула для смачиваемой поверхности выпуклого днища ([2]), полученная прямым интегрированием соответствующих общих формул для площади поверхностей, оказалась удивительно простой и изящной. Она записывается в виде:

$$A_w(h) = (R^2+a^2)\left\{\frac{1+E^2}{2E^2}\arccos(\Delta_1\Delta_2) - \frac{1-E^2}{2E^2}\arccos(\Delta_1) - \frac{1-H}{E}\arccos(\Delta_2)\right\}, \quad (1)$$

где выпуклое днище представляет собой сегмент сферы радиуса R_d, имеет радиус R и высоту $a = R_d - \sqrt{(R_d^2 - R^2)}$ (рис. 1) и заполнено жидкостью до высоты $0 \le h \le R$, а безразмерные параметры рассчитываются по формулам:

$$H = \frac{h}{R},\ E = \frac{a}{R},\ \Delta_1 = 1 - H,\ \Delta_2 = \frac{1-E^2}{\sqrt{((1+E^2)^2 - 4E^2(1-H)^2}} \quad (2)$$

С тех пор автора не оставляла мысль, что столь простая формула не может быть случайностью, а должна иметь определенный геометрический смысл и выводиться гораздо естественнее. И действительно, оказалось, что данная формула может быть получена на основе базовых соотношений сферической тригонометрии, а обратные тригонометрические функции в ней соответствуют углам совершенно конкретного сферического треугольника!

Рассмотрим рисунок 1. Область поверхности сферы, площадь которой надо найти, представляет собой пересечение двух кругов (сегментов) на сфере – правого радиусом R и высотой a (самого днища) и нижнего радиусом $R_1 = \sqrt{(R_d^2 - (R-h)^2)}$ и высотой $b = R_d - (R - h)$. Соединим концы этой области с центрами этих кругов геодезическими (дугами окружностей большого круга) a', a'' и b', b''. Соединим также центры кругов дугой большого круга c. Тогда:

$$A_w(h) = A_{aa} + A_{bb} - A_{aabb} = A_{aa} + A_{bb} - 2A_{abc}, \quad (3)$$

где A_{aa} и A_{bb} – площади секторов кругов на сфере, ограниченных соответственно a', a'' и b', b'', а A_{aabb} и A_{abc} – площади сферических четырехугольника a', a'', b'', b' и сферического треугольника a', b', с (с углами A, B, C) – см. рис. 1. В самом деле, искомая площадь учтена дважды в сумме $A_{aa} + A_{bb}$ и один раз в A_{aabb}.

Площадь сегмента A_{aa} составляет такую же долю от полной площади всего круга $2\pi R_d a = \pi(R^2 + a^2)$, как угол $2A$ к 2π. Отсюда:

$$A_{aa} = 2R_d a A = (R^2 + a^2) A \quad (4)$$

Угол A можно найти, рассмотрев проекцию на основание днища:

$$\cos A = (R - h)/R = 1 - H = \Delta_1,\ A = \arccos \Delta_1 \quad (5)$$

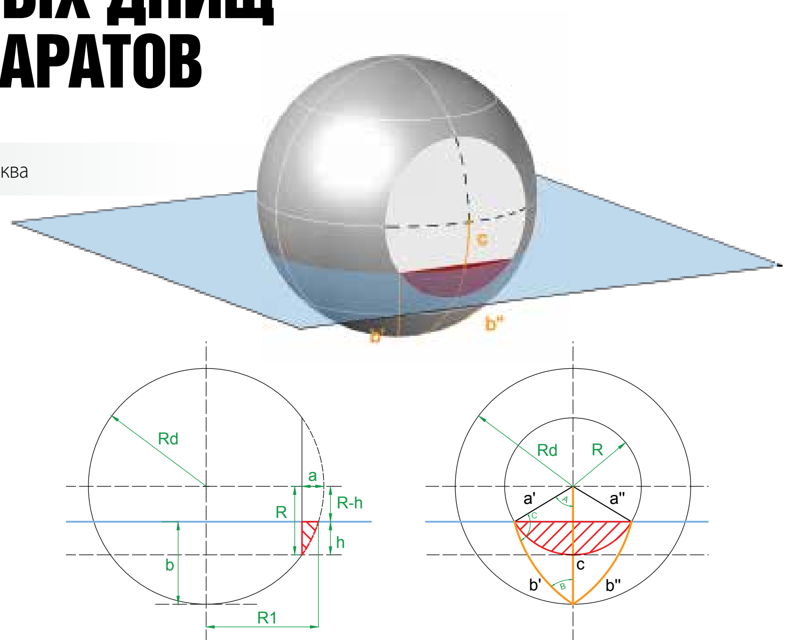

Рисунок 1

Аналогично:

$$A_{bb} = 2R_d bB = (R^2 + a^2)\, b/a\, B = (R^2 + a^2)\,[(1 + E^2)/(2E^2) - (1 - H)/E]\, B \quad (6)$$

$$\cos B = (R_d - a)/R_1 = \frac{1-E^2}{\sqrt{((1+E^2)^2 - 4E^2(1-H)^2}} = \Delta_2,\ B = \arccos \Delta_2 \quad (7)$$

Площадь A_{abc} находим по формуле, связывающей площадь сферического треугольника со сферическим избытком [3]:

$$A_{abc} = R_d^2 (A + B + C - \pi) = (R^2 + a^2)(1 + E^2)/4E^2 (A + B + C - \pi) \quad (8)$$

Подставляя (4), (6) и (8) в (3), получим в итоге:

$$A_w(h) = (R^2 + a^2)\,\{(1 + E^2)/2E^2 (\pi - C) - (1 - E^2)/2E^2 A - (1 - H)/E\, B\} \quad (9)$$

Остается найти угол C. Применим теорему косинусов для углов сферического треугольника a', b', c:

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c \quad (10)$$

Но дуга с составляет 90°, и из (10) получаем:

$$\cos C = -\cos A \cos B = -\Delta_1 \Delta_2,\ C = \pi - \arccos \Delta_1 \Delta_2 \quad (11)$$

Подстановка выражений для углов $A = \arccos \Delta_1$, $B = \arccos \Delta_2$, $C = \pi - \arccos \Delta_1 \Delta_2$ в (9) дает формулу (1).

Заметим в заключение, что формулу (1) можно переписать в следующем виде, который работает во всем диапазоне высот налива $(0 \le h \le 2R)$:

$$A_w(h) = (R^2+a^2)\left\{\frac{\pi}{2} - \frac{1+E^2}{2E^2}\arcsin(\Delta_1\Delta_2) + \frac{1-E^2}{2E^2}\arcsin(\Delta_1) - \frac{1-H}{E}\arccos(\Delta_2)\right\} \quad (12)$$

Автор благодарен Н. Ю. Максименко за помощь в оформлении статьи.

Литература:

1. Корельштейн Л. Б. Формула расчета смачиваемой поверхности эллиптического днища // Трубопроводная арматура и оборудование. – 2018. – № 1 (94). – С. 64–65.
2. Корельштейн Л. Б. Расчет смачиваемой поверхности выпуклых и торосферических днищ горизонтальных аппаратов // Трубопроводная арматура и оборудование. – 2018. – № 2 (95). – С. 82.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1978. – 832 с.