

Автоматизация и информатизация ТЭК. 2024. № 1(606). С. 59–66  
Automation and informatization of the fuel and energy complex. 2024; (1(606)):59-66

Научная статья  
УДК 519.65  
Шифр научной специальности: 1.2.2

## ИНТЕРПОЛЯЦИЯ СВОЙСТВ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СМЕСИ ДЛЯ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ ТРУБОПРОВОДОВ

Мария Павловна Скрипаченко

НТП Трубопровод, г. Москва, Россия, skripachenko@truboprovod.ru

**Аннотация.** В статье предлагается использование бикубической сплайн-интерполяции для оптимизации гидравлических и тепловых расчетов при обработке данных термодинамических библиотек. Проведены исследования как в однофазных газовой, жидкой областях, так и в двухфазной газожидкостной области. Выполнена проверка точности бикубической сплайн-интерполяции для различных термодинамических библиотек на многокомпонентных смесях. Были протестированы различные системы координат:  $(P, x)$ ,  $(P, T)$ ,  $(P, H)$ ,  $(P, S)$ , подобраны оптимальные координаты и сетки интерполяции, исходя из характера изменения различных теплофизических свойств. Эксперименты проводились в области до 80 % от критического давления, так как в околоскритической области характер поведения свойств резко меняется. Также были построены графики свойств и их абсолютных и относительных погрешностей для более детального изучения и определения проблемных зон, где функции свойств претерпевают резкие изменения, затрудняющие интерполяцию. Полученные результаты демонстрируют приемлемую для инженерных расчетов точность аппроксимации данных библиотек.

**Ключевые слова:** бикубическая сплайн-интерполяция, spline, makima, термодинамическая библиотека, узлы интерполяции, оптимизация расчетов, двухфазная и однофазные области, теплофизические свойства, фазовое равновесие

**Для цитирования:** Скрипаченко М.П. Интерполяция свойств многокомпонентной газожидкостной смеси для гидравлических расчетов трубопроводов // Автоматизация и информатизация ТЭК. – 2024. – № 1(606). – С. 59–66.

Original article

### INTERPOLATION OF GAS-LIQUID MULTICOMPONENT FLUID PROPERTIES FOR HYDRAULIC CALCULATIONS OF PIPELINES

Maria P. Skripachenko

Piping Systems Research & Engineering Co (NTP Truboprovod), Moscow, Russia, skripachenko@truboprovod.ru

**Abstract.** The article proposes the use of bi-cubic spline interpolation to optimize hydraulic and thermal calculations while processing thermodynamic library data. The research was carried out both in the single-phase gas and liquid areas as well as in the two-phase gas-liquid area. The accuracy of bi-cubic spline interpolation was tested for various thermodynamic libraries on multi-component mixtures. Various coordinate systems  $(P, x)$ ,  $(P, T)$ ,  $(P, H)$ ,  $(P, S)$  were tested, optimal coordinates and interpolation grids were selected based on the nature of changes of various thermal-physical properties. The experiments were conducted in the range of up to 80 % of critical pressure, since in the near-critical area the properties behavior changes sharply. The plots of properties and their absolute and relative errors were also produced for a more detailed study and determination of problem areas where property functions undergo sharp changes that make interpolation difficult. The results obtained demonstrate an acceptable level of accuracy of the approximation of the thermodynamic libraries data, required for engineering calculations.

**Keywords:** bi-cubic spline interpolation, spline, makima, thermodynamic library, interpolation nodes, optimization of calculations, two-phase and single-phase areas, thermal physical properties, phase equilibrium

**For citation:** Skripachenko M.P. Interpolation of gas-liquid multicomponent fluid properties for hydraulic calculations of pipelines // Automation and informatization of the fuel and energy complex. – 2024. – No 1(606). – P. 59–66.

### Введение

Для исследования трубопроводов при проектировании и реконструкции объектов различных отраслей

промышленности необходимо выполнять многочисленные гидравлические и тепловые расчеты. Для данных расчетов используются такие программы, как

"Гидросистема" [1], "Предклапан" [2] и др. При выполнении подобных расчетов необходимо рассчитывать термодинамические и транспортные теплофизические свойства (ТФС), а также проводить расчет фазового равновесия (ФР) различных фаз при меняющихся в процессе расчета параметрах, в том числе внутри вложенных циклов итераций. Для расчетов свойств и ФР применяются термодинамические библиотеки, к числу которых можно отнести библиотеки "СТАРС", Simulis Thermodynamics, GERG-2008, REFPROP и др. В подобных программах содержатся базы данных, включающие в общей сложности более 5000 индивидуальных веществ, возможно рассчитать содержание и состав фаз по любым парам термодинамических параметров.

Число вызовов подпрограмм из термодинамических библиотек увеличивается с ростом сложности состава продукта, разветвленности рассматриваемого трубопровода, а также сложности выполняемых расчетов. Это в некоторых случаях приводит к резкому увеличению времени выполнения расчета. Из практики применения библиотек видно, что до 90 % программного времени для сложных расчетов приходится именно на расчет ТФС и ФР! В связи с этим была поставлена задача рационализировать (ускорить) процесс расчета путем оптимизации числа запросов программ к библиотекам.

Одним из стандартных способов решения данной проблемы является замена многочисленных запросов к термодинамическим библиотекам на относительно небольшое число запросов к заранее определенному или динамически формируемому набору точек, с последующей интерполяцией результатов на всей интересующей области параметров (так называемый Spline-Based Table Look-Up метод). При этом должна быть обеспечена необходимая точность интерполяции, адекватная точности расчетных моделей и методов в вызывающих программах, а также точности самих термодинамических библиотек.

По результатам, полученным ранее [3–5], применение кубической интерполяции при зависимости от одного параметра и бикубической сплайн-интерполяции для одно- и многокомпонентных веществ в однофазной и двухфазной областях оказалось эффективным, так как относительные погрешности были в допустимых пределах.

### 1. Актуальность и научная новизна

В настоящее время методы интерполяции разработаны достаточно хорошо. Несмотря на это, исследований в области применения интерполяции для расчета ТФС и ФР достаточно мало и полученные результаты в основном относятся к однофазным или однокомпонентным продуктам. Подходы к реализа-

ции двухмерной интерполяции исследованы в меньшей степени, чем одномерной. Еще одной особенностью рассматриваемого случая является явное разделение области параметров, в которой требуется интерполяция, на зоны с криволинейными границами (области жидкой, газовой фаз, сверхкритической области и двухфазной области, ограниченной линиями вскипания и конденсации).

### 2. Постановка задачи и применяемые методы

В данной статье рассматривается использование бикубической сплайн-интерполяции для определения ТФС и ФР различных многокомпонентных смесей реальных газов и жидкостей, в том числе в двухфазной области в зависимости от температуры и давления, доли отгона и давления, давления и энтальпии, давления и энтропии.

Рассматривались бикубические сплайны двух типов: spline (not-a-knot) [6, 7] и makima (Akima) [8]. Естественно ожидать, что бикубические сплайны (дающие дважды дифференцируемую гладкую интерполяцию) обеспечивают высокую точность интерполяции для плавно и равномерно меняющихся в области интерполяции свойств. В то же время сохраняющие монотонность сплайны makima могут иметь преимущество при интерполяции функций с разной скоростью изменения в разных частях области интерполяции.

Бикубическая кусочная сплайн-интерполяция используется для решения задачи интерполяции в прямоугольнике в плоскости  $x, y$  с границами  $a \leq x \leq b$ ,  $c \leq y \leq d$ , с точками равномерной сетки  $(x_i, y_j)$  размером  $n \times m$ . Бикубический интерполирующий сплайн должен проходить через исходные точки. Коэффициенты сплайнов поверхности  $s(x, y)$  определяются  $16 \cdot n \cdot m$  коэффициентами; при этом обычно требуют непрерывность самой функции и ее первых частных производных. Таким образом, обеспечивается гладкость всей поверхности, для чего  $s(x, y)$  должна удовлетворять условиям равенства значений самой функции, первых и смешанных вторых производных в узлах сетки. Либо рассчитываемые для построения сплайнов первые и смешанные вторые производные рассчитываются тем или иным методом по значениям интерполируемой функции в узлах [6, 9–12].

### 3. Анализ литературы

Анализ литературы показывает, что данная тема является актуальной, но в настоящий момент исследована недостаточно.

В [13, 14] бикубическая сплайн-интерполяция используется для расчета диапазона термодинамических свойств хладагентов через интерполяцию энер-

гии Гельмгольца. Этот метод обладает тремя полезными характеристиками: он намного быстрее, чем стандартные методы EOS, довольно точен, а расчеты свойств непротиворечивы. Также важным моментом, описанным в данных работах, является то, что процессное время расчета удалось сократить на 33 %!

В научных трудах [15, 16] рассматривается применение бикубической интерполяции в зависимости от  $(P, T)$  (здесь  $P$  – давление,  $T$  – температура). Объектом исследования был водяной пар. Как следствие, применение интерполяции уменьшило временные и вычислительные затраты.

Интересной оказалась работа [17], где были рассмотрены сложные смеси: азот и углекислый газ; смесь водорода, метана и углекислого газа, а также керосин. Применение сплайн-интерполяции дало приемлемые результаты погрешностей – в пределах 0,1 %, что достаточно для инженерных расчетов, также, кроме снижения временных затрат до 68 %, до 80 % снизились затраты на хранения данных свойств.

Также важной представляется работа J. Vonilla [18], поскольку рассматривалась двухфазная область в зависимости от  $(P, H)$  (здесь  $H$  – энтальпия). Исследовались фазовые переходы и разрывы плотности некоторых веществ.

Использование бикубической сплайн-интерполяции для прогнозирования термодинамических свойств и фазовых равновесий сложных смесей (смесь водорода, кислорода, углекислого газа, азота, метана) рассмотрено в работах [19–21]. Анализ проводился на смесях с разным числом компонентов. Этот тип интерполяции показал хорошие результаты с точки зрения точности, за исключением кривой пар–жидкость и сверхкритического состояния. Ошибка интерполяции значительно возрастает вблизи критической точки.

Таким образом, применение этого метода может позволить выполнять сложное численное моделирование течения в динамике без существенной потери

точности. Погрешность расчета физических свойств составляет не более 0,5 % по сравнению с исходными значениями.

#### 4. Результаты исследований. Бикубическая интерполяция ТФС и ФР многокомпонентных смесей в двух- и однофазных областях в зависимости от $(P, T)$ , $(P, H)$ , $(P, S)$ , $(P, x)$

В настоящей статье предметом обсуждения является использование бикубической сплайн-интерполяции для определения ТФС и ФР реальных газов и жидкостей, представляющих собой многокомпонентные смеси, на равномерной сетке при неменяющемся составе смеси ( $S$  – энтропия,  $x$  – газосодержание). Задача состоит в нахождении универсального подхода для различных библиотек, разных смесей с учетом особенностей поведения всех необходимых свойств. Для тестирования были выбраны составы углеводородных смесей из реальной инженерной практики проектирования объектов нефтепереработки и нефтехимии (таблица).

Для гидравлических и тепловых расчетов требуется обширный перечень свойств. Исследовались следующие свойства: молярная масса газа, коэффициент объемного расширения, динамическая вязкость, теплопроводность, плотность жидкости, коэффициент сжимаемости, энтальпия, энтропия, удельная теплоемкость, коэффициенты изоэнтропии, скорость звука, коэффициент Джоуля – Томпсона, коэффициент поверхностного натяжения и др. Использовались термодинамические библиотеки: "СТАРС" и Simulis Thermodynamics.

Для анализа полученных данных термодинамических библиотек использовался пакет прикладных программ MATLAB.

Главным критерием успешности интерполяции в задаче расчета набора термодинамических свойств и фазовых равновесий является требуемая погрешность их интерполяции. Интерполяция термодинамических свойств желательна с точностью до долей процента, а для транспортных свойств точность порядка 1 %

Составы смесей, используемых для исследования

Номер смеси	Состав	Мольное содержание смесей
1	Метан, этан, пропан	0,3; 0,3; 0,4
2	Метан, пропан, 1-бутен-2-метил, этан, азот, углекислый газ, пентан	0,2275; 0,072; 0,0322; 0,049; 0,0333; 0,006; 0,58
3	Этан, метан, пропан, углекислый газ	0,9688; 0,0204; 0,0093; 0,0015
4	Метан, этан, пропан, бутан, изобутан, изобутен, пентан, гексан, метанол	0,02; 0,01; 0,15; 0,15; 0,15; 0,12; 0,15; 0,15; 0,1
5	Метан, этан, пропан, изобутан, бутан, изопентан, пентан, изогексан, гексан, изогептан, бензол, гептан, изооктан, толуол, октан, изонonan, nonan, изодекан, декан, углекислый газ, азот	0,456094; 0,163140; 0,211402; 0,051382; 0,070745; 0,014431; 0,013521; 0,007539; 0,002825; 0,001321; 0,000061; 0,000753; 0,000193; 0,000679; 0,000026; 0,000003; 0,000012; 0,000100; 0,000160; 0,001083; 0,004530

приемлема для теплогидравлических расчетов трубопроводов [3]. Погрешность оценивалась по относительной погрешности интерполяции на интерполируемой области, а также по отношению погрешности к максимальному перепаду свойства на интерполируемой области (последнее важно, когда свойство может принимать малые или даже нулевые значения, как, например, энтропия).

#### 4.1. О некоторых особенностях интерполяции в двухфазной области. Проблемы и решения

На начальной стадии исследования координатами двухфазной области были  $\ln(Pr)$  (здесь  $Pr$  – приведенное давление) и газосодержание. При этом были обнаружены некоторые особенности работы библиотеки Simulis Thermodynamics. Рассчитанные по библиотеке значения плотности жидкости, вязкости и теплопроводности жидкой фазы, а также коэффициента поверхностного натяжения в двухфазной области вели себя негладко – испытывали скачки изменения в виде ступенек либо изломов. Как выяснилось, такое поведение связано с используемыми в библиотеке по умолчанию "классическими" методами расчета этих свойств (Ideal mixture, "CLASSIC" mixing rules), определяющими свойства смеси на основе отдельных компонентов. При этом линии насыщения отдельных компонентов попадают в зону двухфазной области смеси, что и приводит к так называемым "ступенькам" или изломам на них. Такое поведение функции, естественно, сразу приводит к ухудшению качества интерполяции в окрестностях мест такого поведения. После анализа доступных методов расчета, для дальнейшего использования были выбраны "гладкие" методы: Modified Rackett (mixtures) для расчета плотности жидкости; Ely-Hanley model (TRAPP method) для вязкости и теплопроводности жидкости; Loo and Chien для коэффициента поверхностного натяжения.

То, что сплайн-интерполяцию имеет смысл использовать только в областях гладкого изменения интерполируемых функций, было заранее очевидно. Однако, как выяснилось, термодинамические библиотеки не всегда обеспечивают такую гладкость, причем особенности поведения той или иной библиотеки не всегда очевидны изначально и могут зависеть и от выбранных методов расчета, и от особенностей их реализации в конкретной библиотеке. Отсюда следует, что успешное применение сплайн-интерполяции требует понимания особенностей работы конкретных термодинамических библиотек!

Были исследованы три сетки интерполяции ( $10 \times 10$ ,  $15 \times 15$ ,  $20 \times 20$  точек) с координатой давления – равномерной сеткой по  $\ln(1/Pr - 1)$ . Было рассмотрено несколько вариантов координат по давлению:  $\ln(Pr)$ ,  $1/\ln(Pr)$ ,  $\ln(Pr - 1/Pr)$ ,  $\ln(1/Pr - 1)$  – для обеспечения оптимальной плотности сетки в различных

областях изменения давления без существенного увеличения числа точек, чтобы охватить при этом сразу как можно большую область изменения. Как известно, при малых давлениях свойства практически не меняются или меняются достаточно медленно, а при высоких  $Pr$  начинается быстрое изменение значений свойств. Вместо использования неравномерной сетки было предложено модифицировать координату давления таким образом, чтобы равномерная сетка для этой координаты автоматически учитывала особенности поведения свойств. Оптимальной оказалась равномерная интерполяция по  $\ln(1/Pr - 1)$ , при этом сетка интерполяции по  $Pr$  автоматически уплотняется для высоких давлений и разрежается для низких.

Другой термодинамической особенностью является поведение коэффициента изоэнтропы газожидкостной смеси в двухфазной области. Как известно, при малых давлениях коэффициент изоэнтропы имеет зону быстрого изменения асимптотической шириной порядка  $Pr$  по газосодержанию вблизи линии вскипания, в которой он возрастает от малых значений до значений порядка 1. В этой зоне точность интерполяции по  $x$  резко падает. К сожалению, именно эта зона представляет наибольший интерес при расчете критического и околоскритического течения в трубопроводах и предохранительных клапанах. Поэтому для расчета коэффициента изоэнтропы также была сделана попытка найти подходящую координату, обеспечивающую приемлемую точность интерполяции во всей рассматриваемой двухфазной области. Оказалось, что такой координатой может служить  $eps = x / (x + (1 - x)\sqrt{Pr})$ , равномерная сетка по которой обеспечивает требуемую точность интерполяции коэффициента изоэнтропы.

Дополнительными особенностями смесей 4 и 5 является наличие в крайне малом количестве низкокипящих фракций. В смеси 4 низкокипящие компоненты крайне малого содержания (метан и этан) выкипают первыми, а в смеси 5 имеются высококипящие компоненты также малого содержания (гексан и более тяжелые), которые выкипают самыми последними. В связи с этим в прилегающих к кривым вскипания и конденсации зонах, где происходит быстрое изменение доли отгона этих компонент практически от 0 до 1, наблюдается быстрое изменение состава и свойств жидкой и/или газовой фазы. В данном случае также возможно применение универсального подхода, поскольку ширина таких зон, как оказалось, зависит прежде всего не от содержания компонент, а от приведенного давления. Для таких смесей для подобных зон были разработаны описывающие эти зоны координаты  $eps = x / (x + (1 - x) \cdot Pr)$  – для смеси 4,  $eps = x / (x + (1 - x) / Pr)$  – для смеси 5. При дальнейшем исследовании был сделан вывод, что не-

обходимо гладко "сшивать" две интерполяции по второй координате ( $x, eps$ ) путем умножения на соответствующие гладко меняющиеся взвешенные коэффициенты, это нетривиальное решение. Сшивка позволяет снизить погрешности, так как каждая координата ( $x/eps$ ) учитывала особенности изменения функции вдоль оси, каждая координата работала с определенного края. Подобный подход может быть использован и для коэффициента изоэнтропы, однако для него подходит и описанная выше единая координата, так как его значение не сильно меняется почти во всей области и начинает меняться значительно лишь вблизи линии вскипания ( $x = 0$ ).

**4.2. Двухфазная область. Результаты интерполяции в координатах ( $P, x$ )**

При интерполяции в двухфазной области рассматривалась докритическая область смеси, примерно до  $0,8P_c$  (здесь  $P_c$  – критическое давление). Некоторые смеси имеют узкую двухфазную область в координатах  $P, T$ . Интерполировать такую область в этих координатах неэффективно, отсюда и интерполяция по

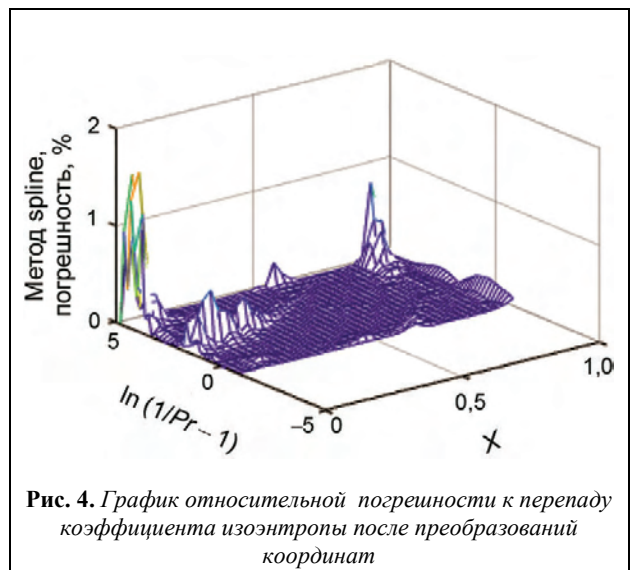
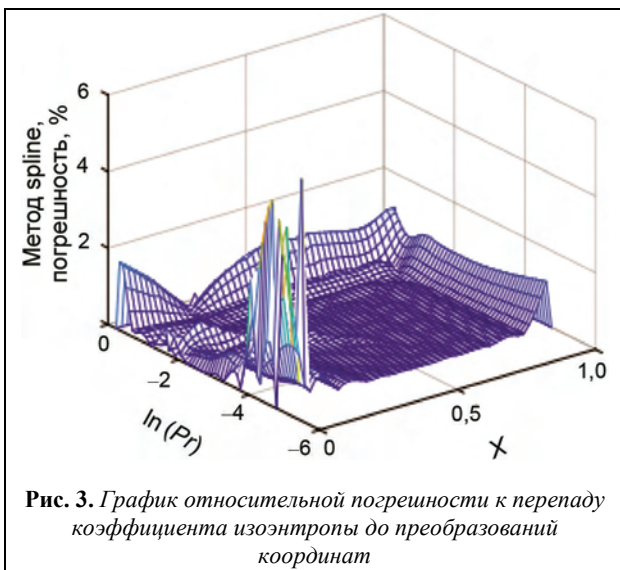
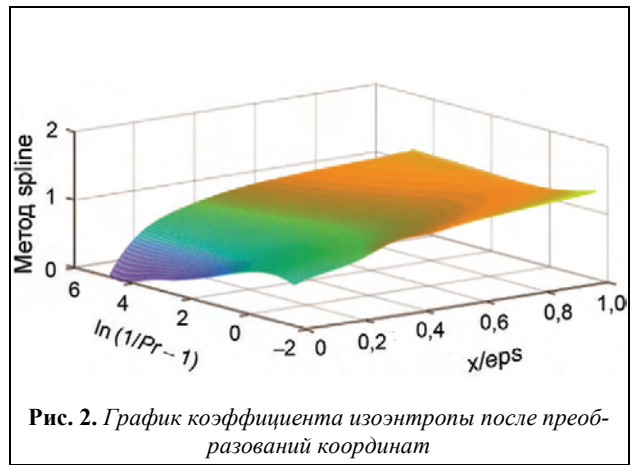
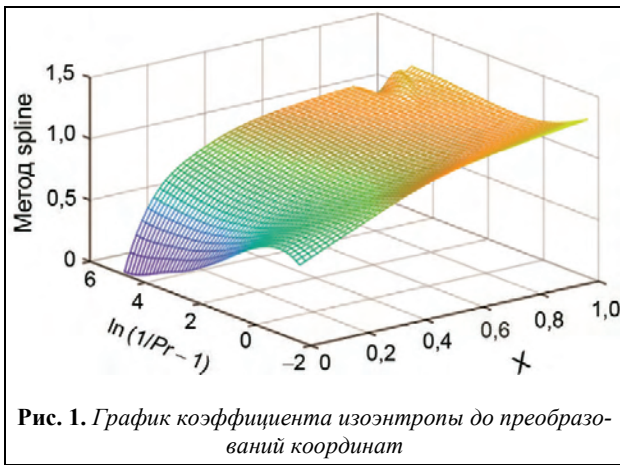
давлению и газосодержанию. Кроме того, при этом сетка интерполяции становится прямоугольной и нет необходимости прибегать к дополнительным операторам преобразования координат.

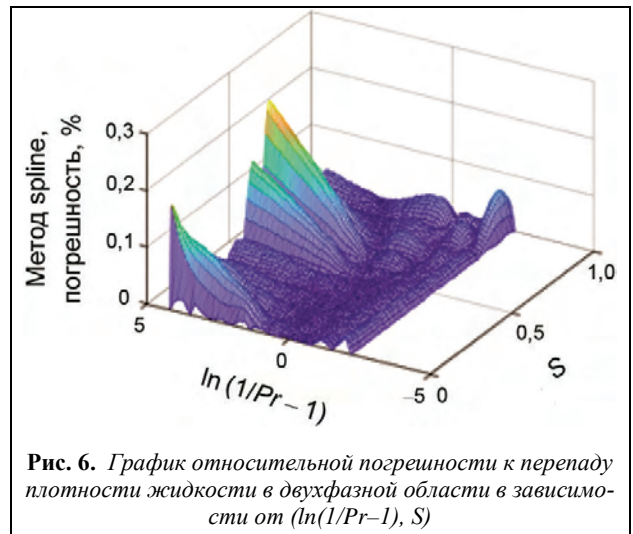
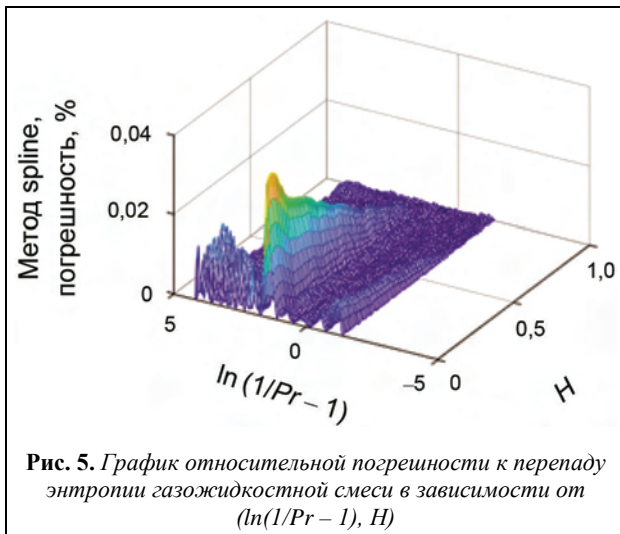
После проведения исследований для координат ( $\ln(1/Pr - 1), x/eps$ ) результаты были удовлетворительными, так как достигнута погрешность в пределах 1 % и лучше. На рис. 1, 2 представлены графики коэффициента изоэнтропы до преобразования координат и после.

Рисунки 3, 4 иллюстрируют относительную погрешность к перепаду коэффициента изоэнтропы до преобразования координат и после.

**4.3. Двухфазная область. Результаты интерполяции в координатах ( $P, H$ )/( $P, S$ )**

Также были проведены исследования по интерполяции в координатах ( $P, H$ )/( $P, S$ ), поскольку данные координаты для гидравлических расчетов, для расчетов предохранительных клапанов наиболее удобны. При этом использовались координаты  $\ln(1/Pr - 1)$  и безразмерные координаты энтальпии  $H$  или энтропии  $S$ .





пии  $S$ , нормализованные на перепад энтальпии/энтропии между точками конденсации  $H(dew)$  и кипения  $H(bubble)$  в зависимости от давления

$$\frac{H - H(bubble)}{H(dew) - H(bubble)}$$

Статистический анализ относительных погрешностей показывает, что такие координаты обеспечивают даже несколько большую точность, чем интерполяция по газосодержанию. Рисунки 5, 6 иллюстрируют приемлемые погрешности интерполяции энтропии в зависимости от  $(\ln(1/Pr-1), H)$  и плотности жидкости от  $(\ln(1/Pr-1), S)$  методом spline, которые не превышают 0,5 %.

#### 4.4. Примыкающие однофазные области. Результаты интерполяции в координатах $(P, T)/(P, H)/(P, S)$

Поскольку в процессе расчетов возможен переход продукта из двухфазного в однофазное состояние и обратно, важно в этом случае иметь интерполяцию примыкающих к границе двухфазной области однофазных областей жидкости и газа.

Для построения такой интерполяции во всех рассматриваемых случаях в качестве одной из координат использовалась  $\ln(1/Pr-1)$ . В качестве второй координаты принималось отклонение температуры (энтальпии/энтропии) от значения на линии кипения в случае однофазной области (жидкости), а для газа, соответственно, от значения на линии конденсации. Это позволяет преобразовать другую координату в нормализованную (например, от 0 до 1) и применять интерполяцию на равномерной сетке в прямоугольнике. При этом погрешность интерполяции по  $(P, H)/(P, S)$  оказывается значительно ниже 1 % и составляет в среднем сотые доли процента.

#### Заключение и выводы

Применение бикубических сплайнов позволяет интерполировать ТФС реальных газов и жидкостей в

двухфазной и примыкающих однофазных областях. Для улучшения результатов интерполяции были разработаны различные системы координат, учитывающие особенности поведения интерполируемых свойств. Также были исследованы сетки по энтальпии/энтропии, что позволяет дополнительно уменьшить погрешность. В большинстве случаев метод spline дает несколько лучшую точность по сравнению со сплайнами Akima. Оптимальной оказалась сетка с числом точек, равным  $15 \times 15$ .

В результате удалось разработать подходы, позволяющие единообразно провести интерполяцию разнообразных многокомпонентных смесей на основе сравнительно небольшого числа точек в широком диапазоне: почти всей двухфазной области (кроме критической области) и примыкающих однофазных областей.

В дальнейшем планируется опробовать разработанные подходы на более разнообразных смесях, в том числе включающих нефтяные фракции, а также с использованием дополнительных библиотек GERG-2008 и REFPROP. Одновременно планируется разработка соответствующего модуля интерполяции ТФС и ФР для включения в программы "Гидросистема" и "Предклапан".

*Автор выражает глубокую благодарность зам. директора по новым разработкам и международному рынку Леониду Бенционовичу Корельштейну и зам. директора по ИТ ООО "НТП Трубопровод" Алексею Ивановичу Тимошкину за консультации и помощь.*

#### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Юдовина Е.Ф., Пашенкова Е.С., Корельштейн Л.Б. Программный комплекс "Гидросистема" и его использование для гидравлических расчетов трубопроводных систем // Трубопроводные системы энергетики. Методологические и прикладные проблемы математического моделирования. – Новосибирск: Наука, 2015. – С. 438–446.

2. Лусин С.Ю., Корельштейн Л.Б. "Предклапан" – российский инструмент проектирования систем аварийного сброса // *Пром. сервис.* – 2012. – № 3. – С. 16–22.
3. Скрипаченко М.П., Корельштейн Л.Б. Использование кубической интерполяции для ускорения тепловых и гидравлических расчетов // *Успехи в химии и химической технологии.* – 2020. – Т. 34, № 6(229). – С. 66–68.
4. Скрипаченко М.П., Корельштейн Л.Б., Гартман Т.Н. Использование бикубической интерполяции для ускорения тепловых и гидравлических расчетов реальных газов и жидкостей // *Успехи в химии и химической технологии.* – 2021. – Т. 35, № 8(243). – С. 134–138.
5. Корельштейн Л.Б., Скрипаченко М.П. Использование методов динамической интерполяции при расчете течений в трубопроводах // *Мат. модели и методы анализа и оптимального синтеза развивающихся трубопроводных и гидравлических систем: тр. XVIII Всерос. науч. семинара, Иркутск, 12–18 сент. 2022 г.* – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2022.
6. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing* / W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery. – 3<sup>rd</sup> Edition. – Cambridge University Press, 2007. – 1235 p.
7. Agrapart Q., Batailly A. Cubic and bicubic spline interpolation in Python. – École Polytechnique de Montréal, 2020. – 52 p.
8. Takács B., Hadjimichael Y. High order discretization methods for spatial-dependent epidemic models // *Mathematics and Computers in Simulation.* – 2022. – Vol. 198. – P. 211–236. – DOI: 10.1016/j.matcom.2022.02.021
9. Hall C.A. Natural cubic and bicubic spline interpolation // *SIAM J. on Numerical Analysis.* – 1973. – Vol. 10, Issue 6. – P. 1055–1060. – DOI: 10.1137/0710088
10. Шикин Е.В., Плис А.И. Кривые и поверхности на экране компьютера. – М.: Диалог-МИФИ, 1996. – 237 с.
11. Lénárd M. Spline interpolation in two variables // *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica.* – 1985. – Vol. 20. – P. 145–154.
12. *Handbook of Mathematics* / I.N. Bronshtein, K.A. Semendyayev, G. Musiol, H. Mühlig. – Berlin: Springer, 2015. – 1207 p.
13. Fast Calculation of Refrigerant Properties in Vapor Compression Cycles Using Spline-Based Table Look-Up Method (SBTL) / Lixiang Li, J. Gohl, J. Batteh [et al.] // *Linköping Electronic Conf. Proc.* – 2019. – Vol. 154. Proc. of the 1<sup>st</sup> American modelica conf., Oct. 9–10, 2018, Cambridge, Massachusetts, USA. – P. 77–84. – DOI: 10.3384/ecp1815477
14. Laughman C.R., Zhao Y., Nikovski D. Fast Refrigerant Property Calculations Using Interpolation-Based Methods // *Int. Refrigeration and Air Conditioning Conf., Purdue, July 16–19, 2012.* – Mitsubishi Electric Research Laboratories, 2012.
15. A hyperbolic phase-transition model coupled to tabulated EoS for two-phase flows in fast depressurizations / M. De Lorenzo, Ph. Lafon, M. Pelanti [et al.] // *Nuclear Engineering and Design.* – 2021. – Vol. 371. – P. 110954. – DOI: 10.1016/j.nucengdes.2020.110954
16. Miller W.Ch. Fast and accurate water and steam properties programs for two-phase flow calculations // *Nuclear Engineering and Design.* – 1994. – Vol. 149, Issue 1-3. – P. 449–458.
17. Schulze Ch. A Contribution to Numerically Efficient Modelling of Thermodynamic Systems: PhD thesis. – Braunschweig, 2014. – 133 p. – URL: [https://leopard.tu-braunschweig.de/servlets/MCRFileNodeServlet/dbbs\\_derivate\\_00035600/Diss\\_Schulze\\_Christian.pdf](https://leopard.tu-braunschweig.de/servlets/MCRFileNodeServlet/dbbs_derivate_00035600/Diss_Schulze_Christian.pdf)
18. Bonilla J., Yebra L.J., Dormido S. Chattering in dynamic mathematical two-phase flow models // *Applied Mathematical Modelling.* – 2012. – Vol. 36, Issue 5. – P. 2067–2081. – DOI: 10.1016/j.apm.2011.08.013
19. Thermodynamic interpolation for the simulation of two-phase flow of non-ideal mixtures / S. Brown, L. Peristeras, S.B. Martynov [et al.] // *Computers & Chemical Engineering.* – 2016. – Vol. 95. – P. 45–57. – DOI: 10.1016/j.compchemeng.2016.09.005
20. Mupparapu S.P. Supercritical thermodynamic property evaluation via adaptive mesh tabulation: thesis for the degree of Master of Applied Science in Mechanical and Mechatronics Engineering. – Waterloo, Ontario, Canada, 2019. – 100 p. – URL: [https://uwspace.uwaterloo.ca/bitstream/handle/10012/14448/Mupparapu\\_SaiPraneeth.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://uwspace.uwaterloo.ca/bitstream/handle/10012/14448/Mupparapu_SaiPraneeth.pdf?sequence=1&isAllowed=y)
21. Pini M. Turbomachinery Design Optimization using Adjoint Method and Accurate Equations of State: PhD thesis. – Milano, 2013. – 164 p. – URL: [https://www.politesi.polimi.it/bitstream/10589/89787/1/2014\\_03\\_PhD\\_Pini.pdf](https://www.politesi.polimi.it/bitstream/10589/89787/1/2014_03_PhD_Pini.pdf)

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Yudovina E.F., Pashenkova E.S., Korel'shteyn L.B. Programmnyy kompleks "Gidrosistema" i ego ispol'zovanie dlya gidravlicheskih raschetov truboprovodnykh sistem // *Truboprovodnye sistemy energetiki. Metodologicheskie i prikladnye problemy mat. modelirovaniya.* – Novosibirsk: Nauka, 2015. – S. 438–446.
2. Lusin S.Yu., Korel'shteyn L.B. "Predklapan" – rossiyskiy instrument proektirovaniya sistem avariynogo sbrosa // *Prom. servis.* – 2012. – № 3. – S. 16–22.
3. Skripachenko M.P., Korel'shteyn L.B. Ispol'zovanie kubicheskoy interpol'yatsii dlya uskoreniya teplovykh i gidravlicheskih raschetov // *Uspekhi v khimii i khimicheskoy tekhnologii.* – 2020. – Т. 34, № 6(229). – S. 66–68.
4. Skripachenko M.P., Korel'shteyn L.B., Gartman T.N. Ispol'zovanie bikubicheskoy interpol'yatsii dlya uskoreniya teplovykh i gidravlicheskih raschetov real'nykh gazov i zhidkostey // *Uspekhi v khimii i khimicheskoy tekhnologii.* – 2021. – Т. 35, № 8(243). – S. 134–138.
5. Korel'shteyn L.B., Skripachenko M.P. Ispol'zovanie metodov dinamicheskoy interpol'yatsii pri raschete techeniy v truboprovodakh // *Мат. модели и методы анализа и оптимального*

- sinteza razvivayushchikhsya truboprovodnykh i gidravlicheskih sistem: tr. XVIII Vseros. nauch. seminara, Irkutsk, 12–18 sent. 2022 g. – Irkutsk: ISEM SO RAN, 2022.*
6. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing / W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery. – 3<sup>rd</sup> Edition. – Cambridge University Press, 2007. – 1235 p.*
7. *Agrapart Q., Batailly A. Cubic and bicubic spline interpolation in Python. – École Polytechnique de Montréal, 2020. – 52 p.*
8. *Takács B., Hadjimichael Y. High order discretization methods for spatial-dependent epidemic models // Mathematics and Computers in Simulation. – 2022. – Vol. 198. – P. 211–236. – DOI: 10.1016/j.matcom.2022.02.021*
9. *Hall C.A. Natural cubic and bicubic spline interpolation // SIAM J. on Numerical Analysis. – 1973. – Vol. 10, Issue 6. – P. 1055–1060. – DOI: 10.1137/0710088*
10. *Shikin E.V., Plis A.I. Krivye i poverkhnosti na ekrane komp'yutera. – M.: Dialog-MIFI, 1996. – 237 s.*
11. *Lénárd M. Spline interpolation in two variables // Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica. – 1985. – Vol. 20. – P. 145–154.*
12. *Handbook of Mathematics / I.N. Bronshtein, K.A. Semendyayev, G. Musiol, H. Mühlig. – Berlin: Springer, 2015. – 1207 p.*
13. *Fast Calculation of Refrigerant Properties in Vapor Compression Cycles Using Spline-Based Table Look-Up Method (SBTL) / Lixiang Li, J. Gohl, J. Bateh [et al.] // Linköping Electronic Conf. Proc. – 2019. – Vol. 154. Proc. of the 1<sup>st</sup> American modelica conf., Oct. 9–10, 2018, Cambridge, Massachusetts, USA. – P. 77–84. – DOI: 10.3384/ecp1815477*
14. *Laughman C.R., Zhao Y., Nikovski D. Fast Refrigerant Property Calculations Using Interpolation-Based Methods // Int. Refrigeration and Air Conditioning Conf., Purdue, July 16–19, 2012. – Mitsubishi Electric Research Laboratories, 2012.*
15. *A hyperbolic phase-transition model coupled to tabulated EoS for two-phase flows in fast depressurizations / M. De Lorenzo, Ph. Lafon, M. Pelanti [et al.] // Nuclear Engineering and Design. – 2021. – Vol. 371. – P. 110954. – DOI: 10.1016/j.nucengdes.2020.110954*
16. *Miller W.Ch. Fast and accurate water and steam properties programs for two-phase flow calculations // Nuclear Engineering and Design. – 1994. – Vol. 149, Issue 1-3. – P. 449–458.*
17. *Schulze Ch. A. Contribution to Numerically Efficient Modelling of Thermodynamic Systems: PhD thesis. – Braunschweig, 2014. – 133 p. – URL: [https://leopard.tu-braunschweig.de/servlets/MCRFileNodeServlet/dbbs\\_derivate\\_00035600/Diss\\_Schulze\\_Christian.pdf](https://leopard.tu-braunschweig.de/servlets/MCRFileNodeServlet/dbbs_derivate_00035600/Diss_Schulze_Christian.pdf)*
18. *Bonilla J., Yebra L.J., Dormido S. Chattering in dynamic mathematical two-phase flow models // Applied Mathematical Modelling. – 2012. – Vol. 36, Issue 5. – P. 2067–2081. – DOI: 10.1016/j.apm.2011.08.013*
19. *Thermodynamic interpolation for the simulation of two-phase flow of non-ideal mixtures / S. Brown, L. Peristeras, S.B. Martynov [et al.] // Computers & Chemical Engineering. – 2016. – Vol. 95. – P. 45–57. – DOI: 10.1016/j.compchemeng.2016.09.005*
20. *Mupparapu S.P. Supercritical thermodynamic property evaluation via adaptive mesh tabulation: thesis for the degree of Master of Applied Science in Mechanical and Mechatronics Engineering. – Waterloo, Ontario, Canada, 2019. – 100 p. – URL: [https://uwaterloo.ca/bitstream/handle/10012/14448/Mupparapu\\_SaiPraneeth.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://uwaterloo.ca/bitstream/handle/10012/14448/Mupparapu_SaiPraneeth.pdf?sequence=1&isAllowed=y)*
21. *Pini M. Turbomachinery Design Optimization using Adjoint Method and Accurate Equations of State: PhD thesis. – Milano, 2013. – 164 p. – URL: [https://www.politesi.polimi.it/bitstream/10589/89787/1/2014\\_03\\_PhD\\_Pini.pdf](https://www.politesi.polimi.it/bitstream/10589/89787/1/2014_03_PhD_Pini.pdf)*

Информация об авторе:

**Мария Павловна Скрипаченко**, старший инженер

Information about the author:

**Maria P. Skripachenko**, senior engineer

Статья поступила в редакцию 20.06.2023 г.; одобрена после рецензирования 14.07.2023 г.; принята к публикации 10.12.2023 г.